



2019年8月26日(月)-30日(金) 千葉大学総合校舎1号館4階情報演習室2
宇宙磁気流体・プラズマシミュレーションサマーセミナー

MHD近似リーマン解法

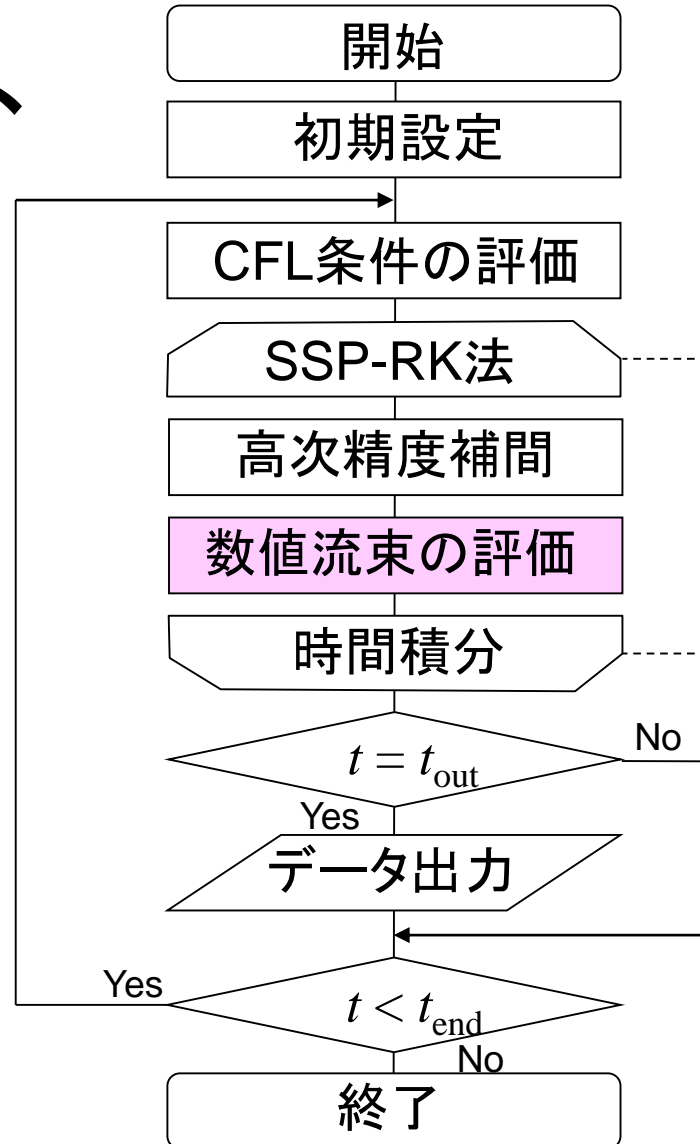
三好 隆博

広島大学大学院理学研究科



フローチャート

と言っても、

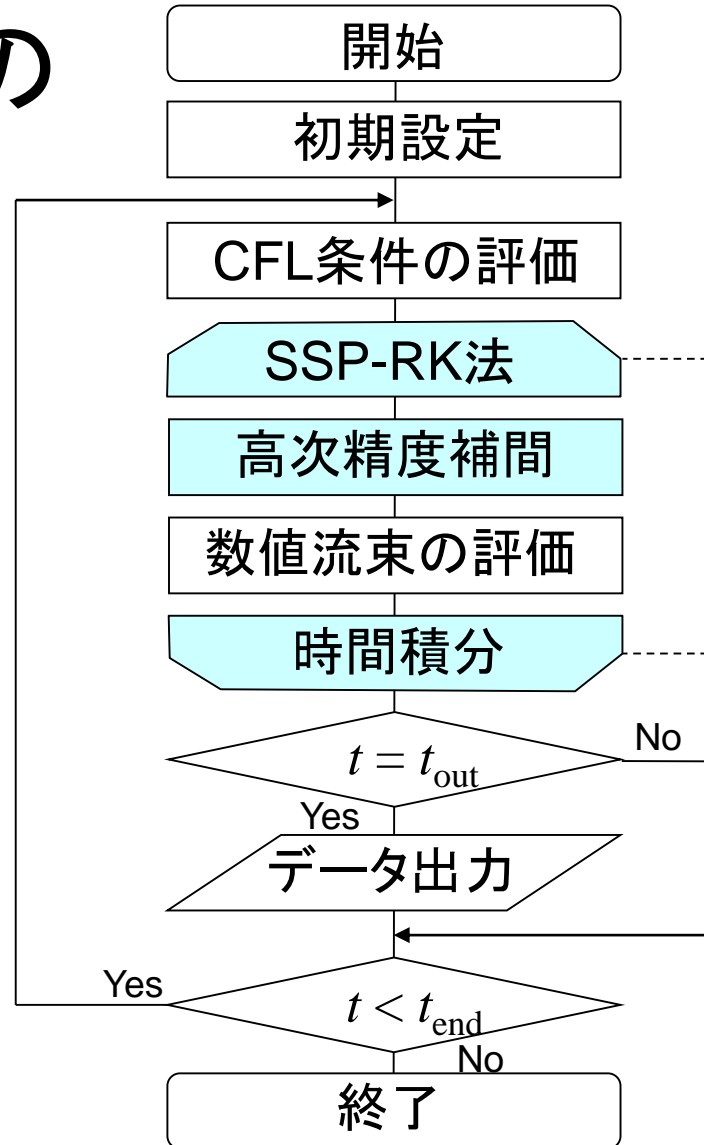


本講義では
👉ここだけ！



フローチャート

飯島先生の
講義では、



＋多次元化

おおお、相当大変・・・



内容

- はじめに
- 流れの基礎方程式
- MHD方程式
- 風上型解法の基礎
 - スカラー方程式の解法
 - システム方程式の解法
- MHD方程式の近似リーマン解法
 - HLL型近似リーマン解法
- 数値解法まとめ
- フローチャート



はじめに



流体

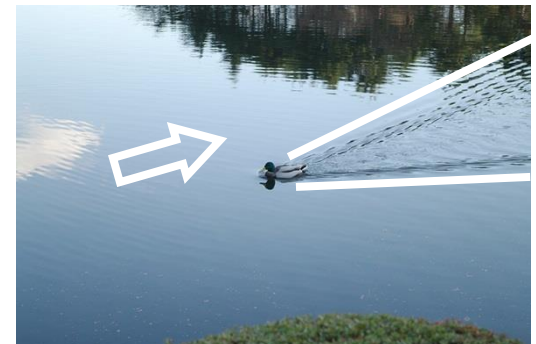
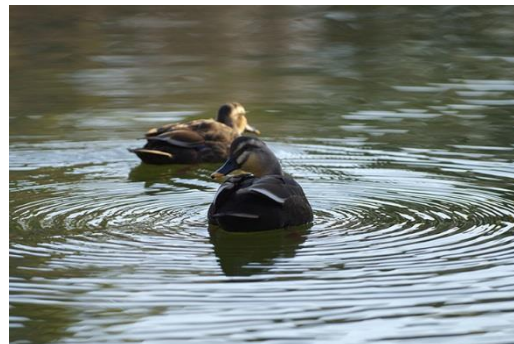
□ 身近な流れは**非圧縮性流体**として非常によく近似

- 非圧縮性流れ (流速/音速 < 0.3)
- 亜音速流れ (流速/音速 ~ 0.3)
- ただし、音響学分野では音波考慮



□ 非日常的で極限的な流れでは**圧縮性**が本質的に重要

- 超音速流れ (流速/音速 > 1)
- **衝撃波**



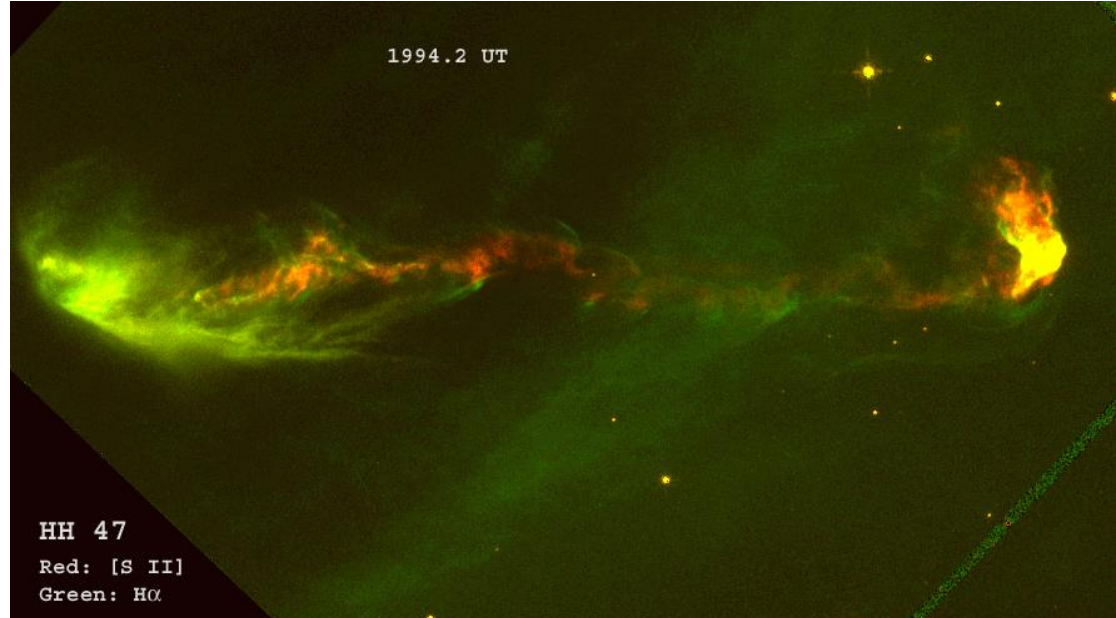
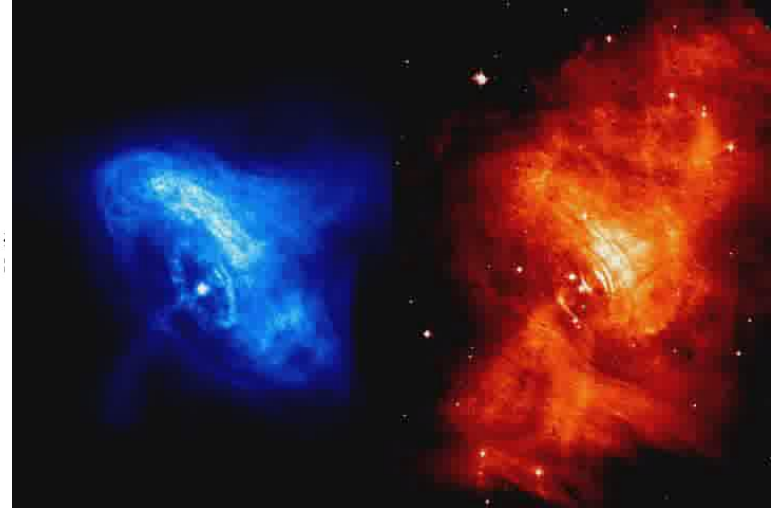
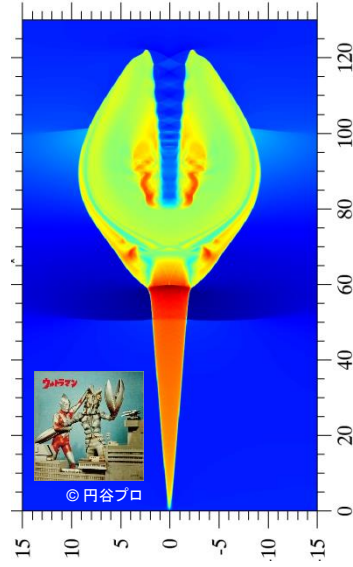
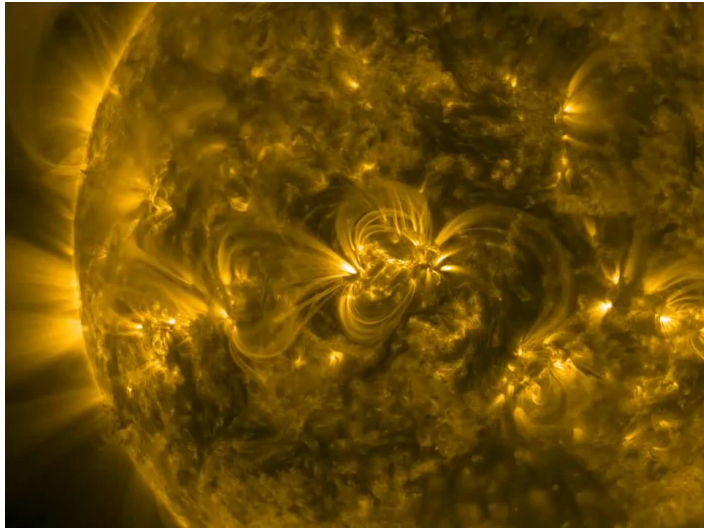
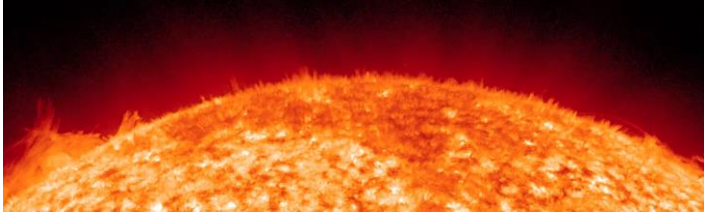


地上での衝撃波





宇宙流体





野望

- 宇宙流体は**圧縮性流体**としての取り扱いが不可欠
 - 密度・圧力変動が大きい流れ
 - (極)超音速流れ(流速/音速 $\gg 1$)
 - **磁場**、放射などが流体と非線形相互作用
 - 高エネルギー天体周りでは相対論的効果

遍在する磁気流体力学(MHD)的な不連続！

本講義では、不連続解をも恐れぬ

数値磁気流体力学の猛者を養成



流れの基礎方程式



流れの基礎方程式

□ 線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f \equiv au \quad (\text{保存形式})$$

$a \equiv dx/dt$ とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \text{ に沿って } du = 0$$



流れの基礎方程式

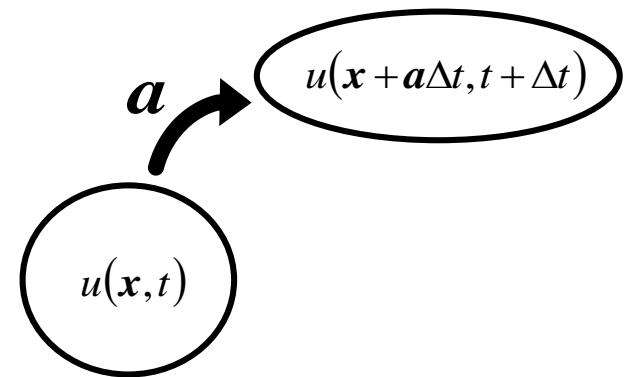
□ ラグランジュ微分

$$\Delta u \equiv u(x + a\Delta t, t + \Delta t) - u(x, t)$$

$$= u(x, t) + a\Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t^2) - u(x, t)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{d}{dt} u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u$$

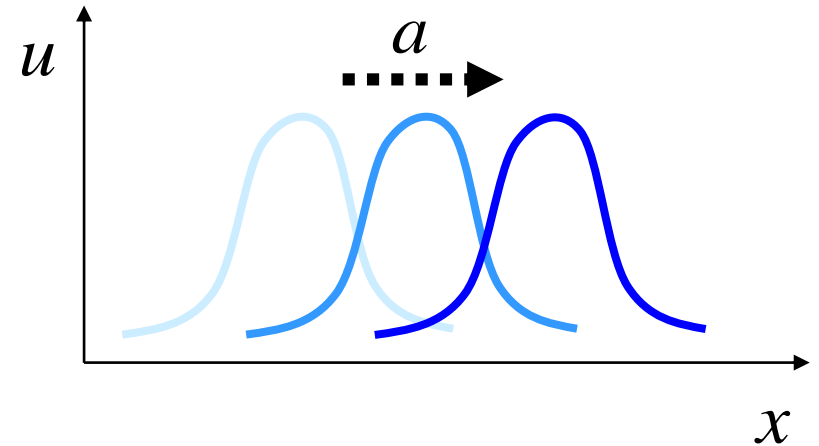
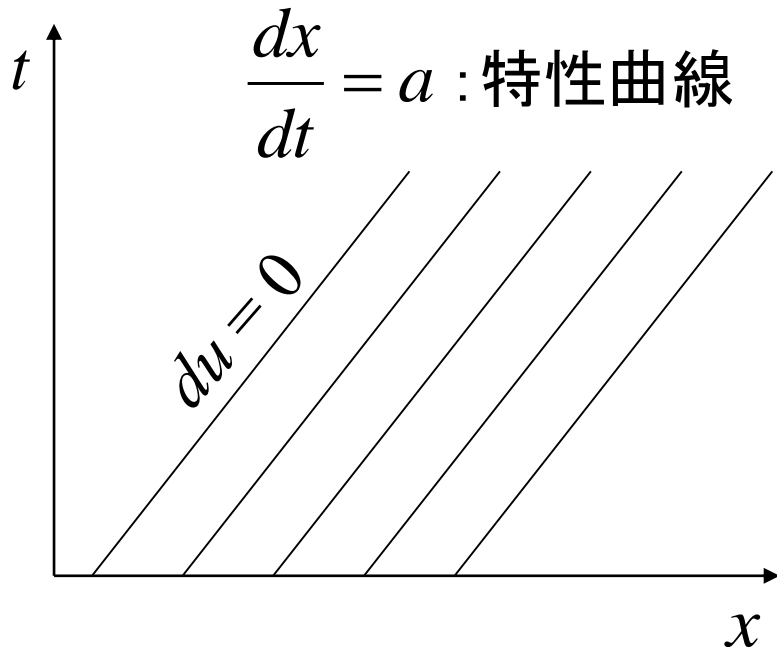




流れの基礎方程式

□ 線形移流方程式

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ に沿って } du = 0$$



$$u(x, t) = F(x - at)$$



流れの基礎方程式

□ 非粘性Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f \equiv \frac{u^2}{2} \quad (\text{保存形式})$$

$u \equiv dx/dt$ とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}$$

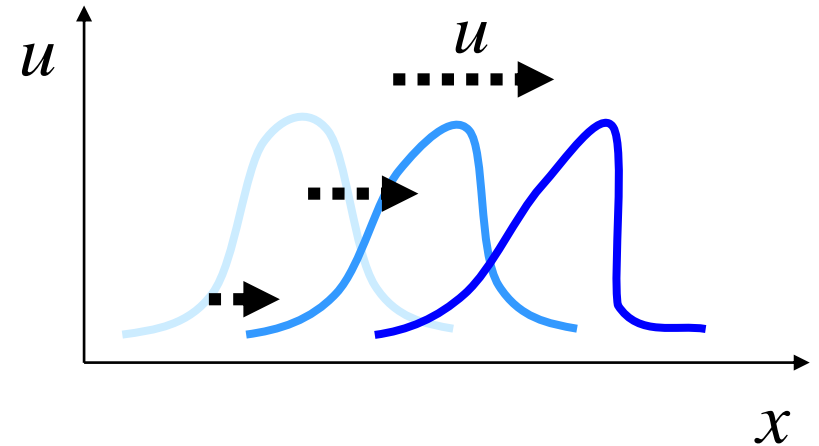
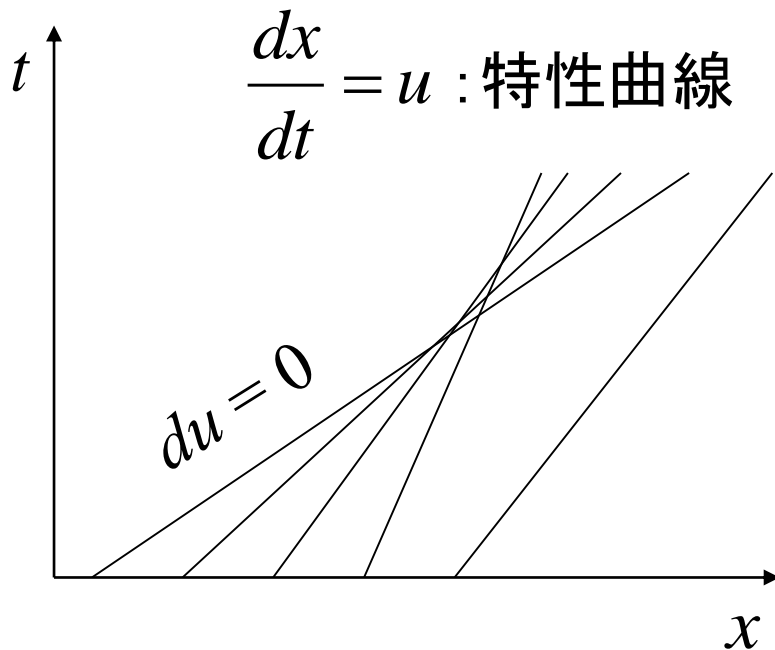
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = u \text{ に沿って } du = 0$$



流れの基礎方程式

□ 非粘性Burgers方程式

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ に沿って } du = 0$$



$$u(x, t) = F(x - ut)$$

解が多価になる場合:

衝撃波解(弱解)



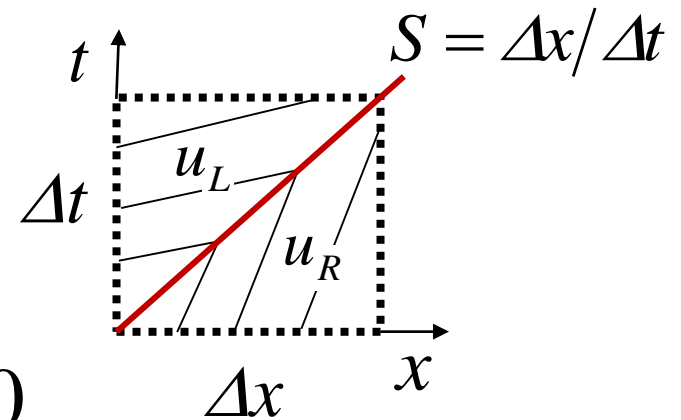
流れの基礎方程式

Rankine-Hugoniot関係式

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dt$$

$$= \oint (u dx - f dt)$$

$$= \Delta x (u_L - u_R) + \Delta t (f_R - f_L) = 0$$



$$S[u] = [f], \quad S \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad [*] \equiv *_R - *_L$$

Burgers方程式の場合:
$$S = \frac{u_R^2/2 - u_L^2/2}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2}$$

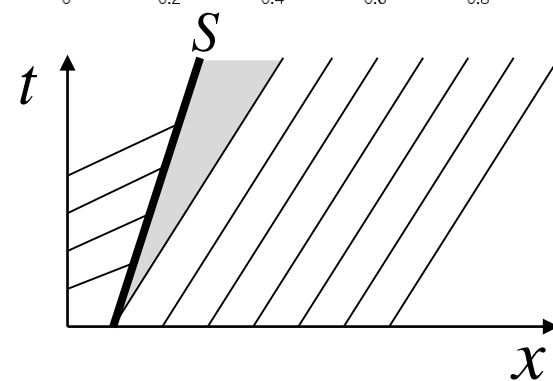
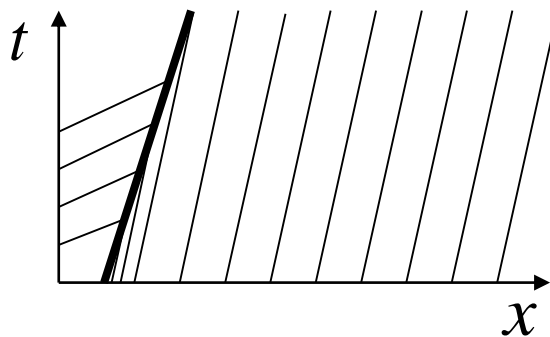
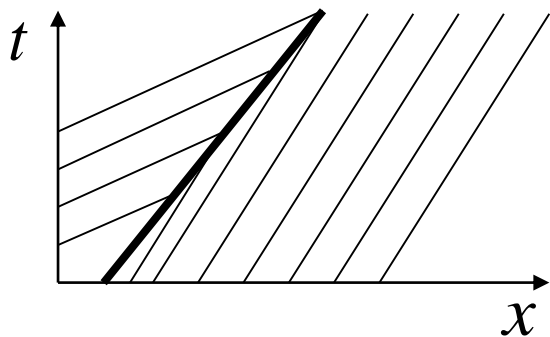
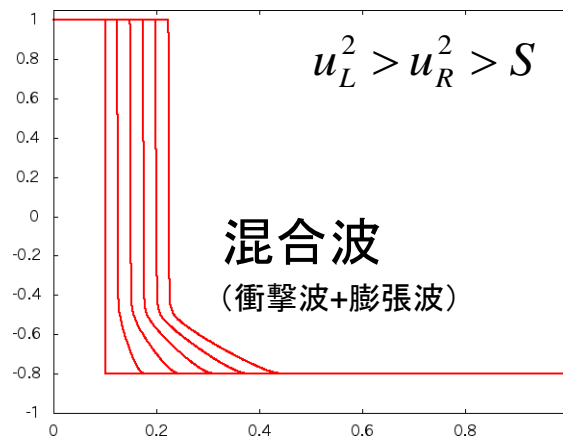
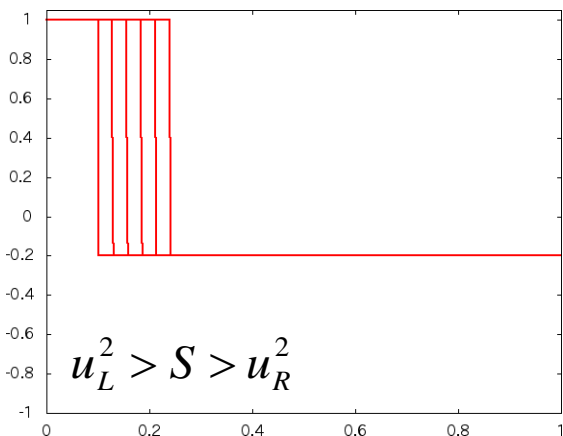
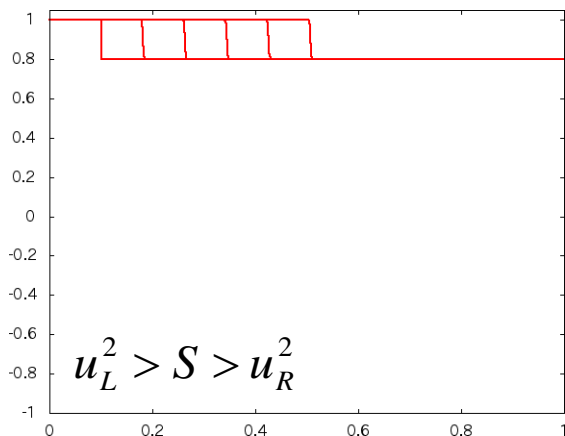


流れの基礎方程式

□ Nonconvexな非線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f \equiv \frac{u^3}{3}$$

$$S = \frac{u_L^2 + u_L u_R + u_R^2}{3}$$





流れの基礎方程式

□ 双曲型保存則

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

$$\Leftrightarrow R^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + R^{-1} A R R^{-1} \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad dW = R^{-1} dU, \quad AR = R\Lambda$$

U : 保存変数ベクトル

W : 特性変数ベクトル

F : 流束ベクトル

A : ヤコビアン行列

Λ : 固有値行列

R : 右固有行列

R^{-1} : 左固有行列

- 独立な実固有値および固有ベクトルを持つとき、方程式は**双曲型**



流れの基礎方程式

□ 双曲型保存則

■ 線形 2×2 保存則

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} v \\ a^2 u \end{pmatrix}, \quad a = \text{const.} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} au + v \\ au - v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0$$



流れの基礎方程式

□ 双曲型保存則

■ 等温Euler方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho a^2 \end{pmatrix}, \quad a = \text{const.} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho \\ a^2/\rho & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} a+u \\ a-u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u+a & 0 \\ 0 & u-a \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0$$



流れの基礎方程式

□ 双曲型保存則

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad d\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} dU$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = 0$$

$$dx/dt = \lambda_k \quad \text{に沿って} \quad dw_k = 0$$

- 一般には連立非線形移流方程式



MHD方程式



MHD方程式

□ Euler方程式 + ローレンツ力 + 磁場の誘導方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \dots \quad \text{連続の式}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \dots \quad \text{運動方程式}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad \dots \quad \text{断熱の式}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots \quad \text{磁場の誘導方程式}$$

■ 流体と磁場の相互作用を支配



MHD方程式

□ 保存形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \dots \quad \text{質量保存則}$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}) = 0 \quad \dots \quad \text{運動量保存則}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [(e + p_T) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})] = 0 \quad \dots \quad \text{エネルギー保存則}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0 \quad \dots \quad \text{磁束保存則}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{\rho v^2}{2} - \frac{B^2}{2} \right), \quad p_T = p + \frac{B^2}{2}$$



MHD方程式

□ 1次元MHD方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad B_x = \text{const.},$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p_T - B_x^2 \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ (e + p_T)u - B_x (u B_x + v B_y + w B_z) \end{pmatrix}$$



MHD方程式

□ 1次元MHD方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} \equiv \frac{\partial F}{\partial U}$$

■ \mathbf{A} の固有値(特性速度)

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7)$$

$$\lambda_1 = u - c_f \leq \lambda_2 = u - c_a \leq \lambda_3 = u - c_s \leq \lambda_4 = u \\ \leq \lambda_5 = u + c_s \leq \lambda_6 = u + c_a \leq \lambda_7 = u + c_f$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}/\sqrt{\rho}, \quad c_a^2 = b_x^2, \quad a^2 = \gamma p/\rho,$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left(a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_x^2} \right)$$

固有ベクトルは大変難しい...
また後で

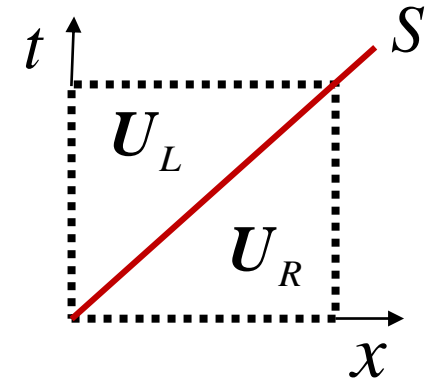


MHD方程式

□ MHD方程式の不連続解

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$\Rightarrow S[U] = [F]$$



不連続にのった系 ($S = 0$):

$$[F] = 0, [u] \neq 0 \quad (\text{速進/遅進衝撃波})$$

$$[\rho] = [p] = [B_y^2 + B_z^2] = 0, \pm \sqrt{\rho} [v] = [B_y], \pm \sqrt{\rho} [w] = [B_z]$$

(回転不連続)

$$[v] = [w] = [B_y] = [B_z] = [p] = 0, B_x \neq 0 \quad (\text{接触不連続})$$

$$\left[p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \right] = 0, B_x = 0 \quad (\text{接線不連続})$$



風上型解法の基礎



風上型解法の基礎

□ 双曲型保存則の解法

□ 双曲型保存則のおさらい

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A = \frac{\partial F}{\partial U}$$

Aが独立な実固有値をもつとき双曲型

■ 線形移流方程式

■ 非粘性Burgers方程式

■ Euler方程式

■ MHD方程式

など

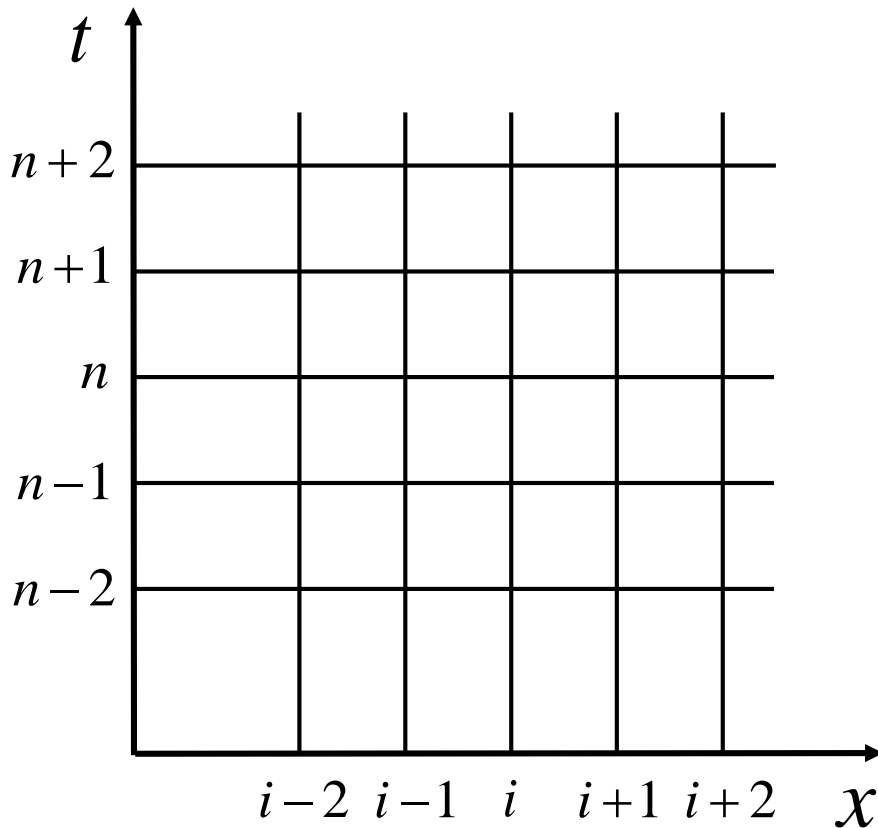
スカラー方程式

システム方程式

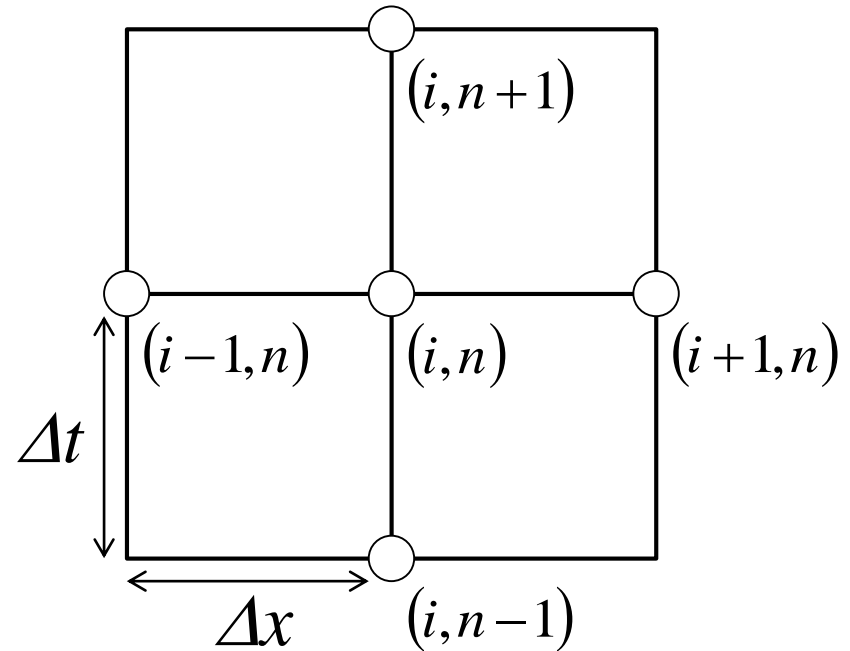


話を進めるその前に

□ 時間・空間座標および変数の離散表記法



$$x_i, t^n, u_i^n = u(x_i, t^n)$$



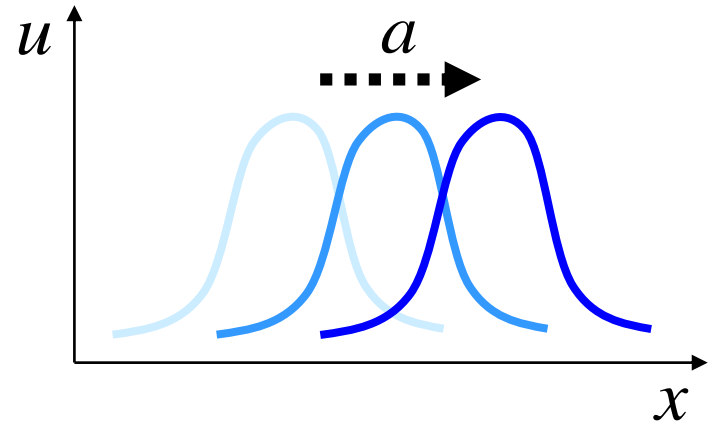


スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = u(x - at, 0)$$



■ 風上法

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad a > 0$$

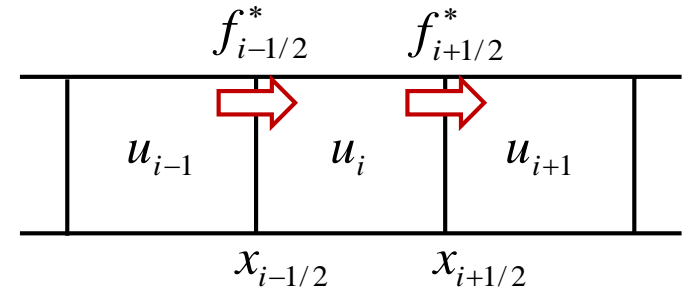


スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式の保存型解法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = au$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0$$

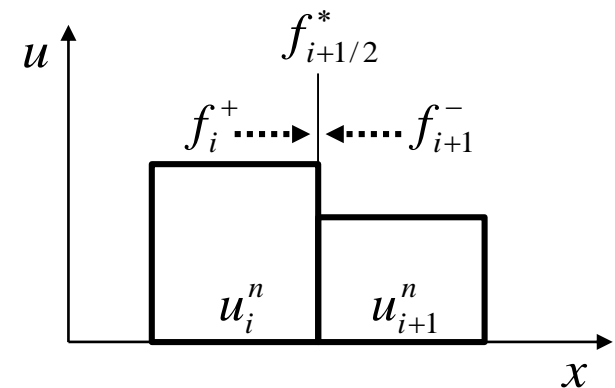


$f_{i+1/2}^*$: 数値流束

■ 流束ベクトル分離法 (FVS法)

$$f = f^+ + f^-, \quad \frac{\partial f^+}{\partial u} \geq 0, \quad \frac{\partial f^-}{\partial u} \leq 0$$

$$\Rightarrow f_{i+1/2}^* = f_i^+ + f_{i+1}^-$$



$$f^\pm = \frac{a \pm |a|}{2} u \Rightarrow f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{|a|}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

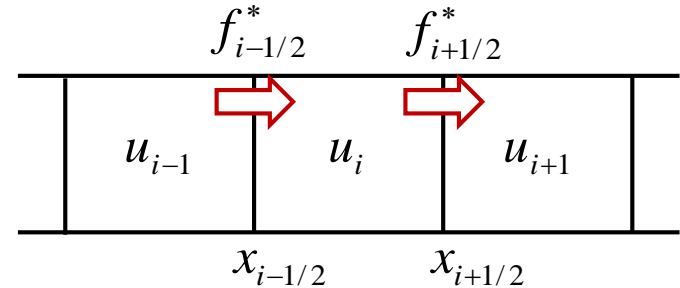


スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式の保存型解法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = au$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0$$



$f_{i+1/2}^*$: 数値流束

■ 流束ベクトル分離法 (FVS法)

$$f = f^+ + f^-, \quad \frac{\partial f^+}{\partial u} \geq 0, \quad \frac{\partial f^-}{\partial u} \leq 0$$

$$\Rightarrow f_{i+1/2}^* = f_i^+ + f_{i+1}^-$$

Lax法

$$f^\pm = \frac{a \pm \Delta t / \Delta x}{2} u \Rightarrow f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

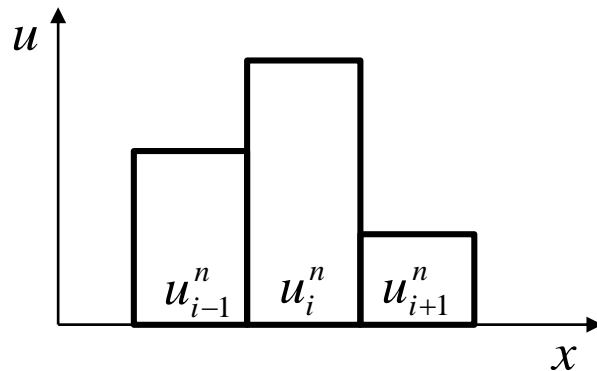


スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式の保存型解法

■ リーマン解法 (Godunov法)

□ リーマン問題 = **衝撃波管問題** を利用



リーマン解法の手順:

1. 区分定数分布を仮定

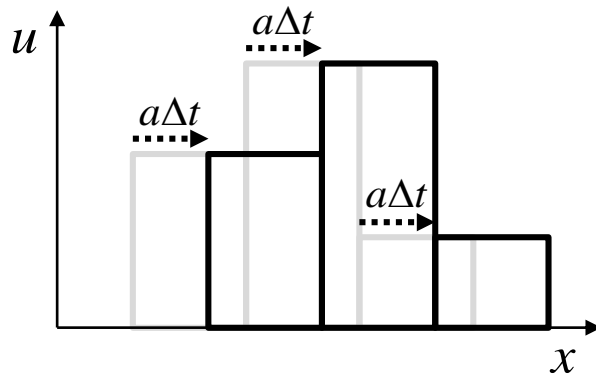


スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式の保存型解法

■ リーマン解法 (Godunov法)

□ リーマン問題 = 衝撃波管問題を利用



リーマン解法の手順:

1. 区分定数分布を仮定
2. 移流方程式の厳密解

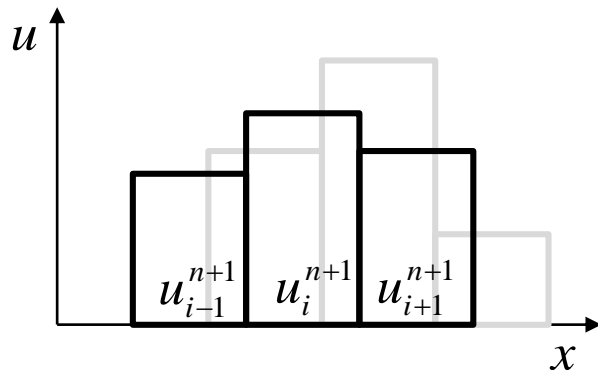


スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式の保存型解法

■ リーマン解法 (Godunov法)

□ リーマン問題 = **衝撃波管問題** を利用



リーマン解法の手順:

1. 区分定数分布を仮定
2. 移流方程式の厳密解
3. 厳密解の空間平均値

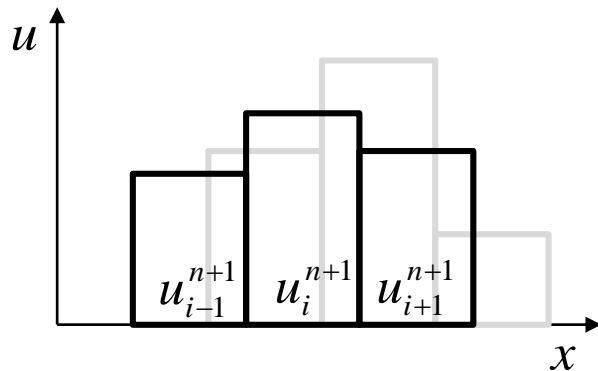


スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式の保存型解法

■ リーマン解法 (Godunov法)

□ リーマン問題 = 衝撃波管問題を利用



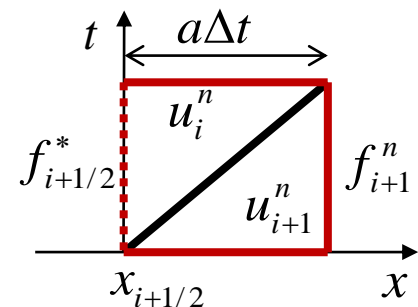
リアマン解法の手順:

1. 区分定数分布を仮定
2. 移流方程式の厳密解
3. 厳密解の空間平均値

□ 数値流束

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

$$\Rightarrow a\Delta t(u_i^n - u_{i+1}^n) + \Delta t(f_{i+1}^n - f_{i+1/2}^*) = 0, \quad a > 0$$





スカラー方程式の解法

□ 線形移流方程式の解法

■ 風上法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad a > 0$$

■ FVS法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*), \quad f_{i+1/2}^* = au_i^n, \quad a > 0$$

■ Godunov法

$$u_i^{n+1} = \frac{a\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n + \frac{\Delta x - a\Delta t}{\Delta x} u_i^n, \quad a > 0$$

全て同じ解法に帰着(でも、思想は異なる)



スカラー方程式の解法

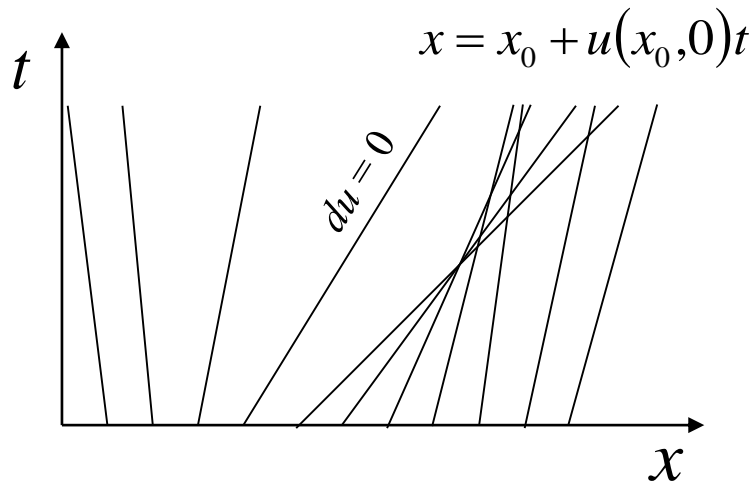
□ 非線形移流方程式

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}}$$

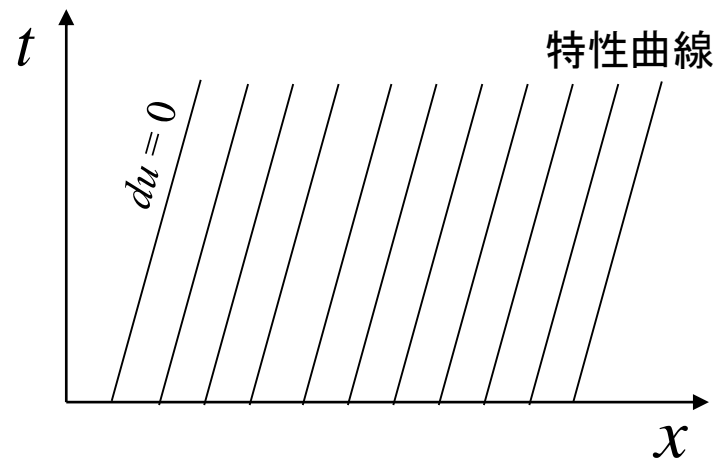
保存形式

非保存形式

$$\frac{dx}{dt} = a(u) \text{ に沿って } du = 0 \Rightarrow u(x, t) = u(x - a(u)t, 0)$$



非線形移流方程式



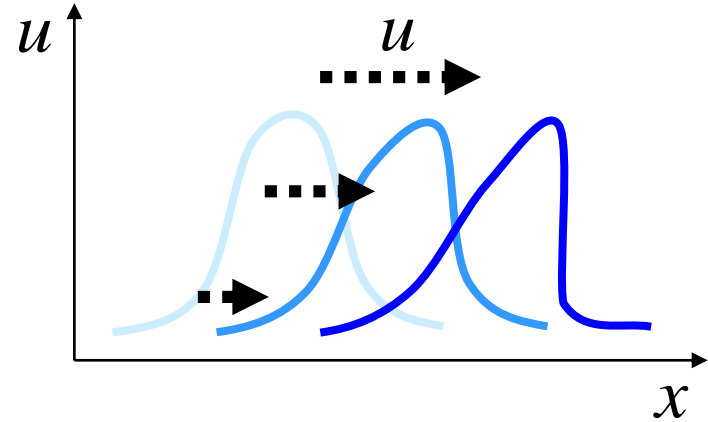
線形移流方程式



スカラー方程式の解法

□ 非粘性Burgers方程式の解法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



■ 風上法 (非保存形式)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{for } u_i^n > 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{for } u_i^n < 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{|u_i^n|}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$



スカラー方程式の解法

□ 非粘性Burgers方程式の解法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

■ FVS法

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0$$

$$f_{i+1/2}^* = f_i^+ + f_{i+1}^-, \quad f^\pm = \frac{u(u \pm |u|)}{4}$$

$$\Rightarrow f_{i+1/2}^* = \frac{f_{i+1}^n + f_i^n}{2} - \frac{1}{4} \left(|u_{i+1}^n| u_{i+1}^n - |u_i^n| u_i^n \right)$$

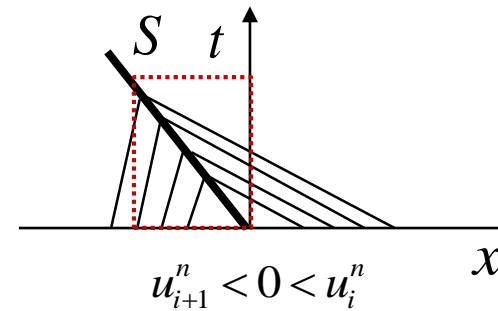
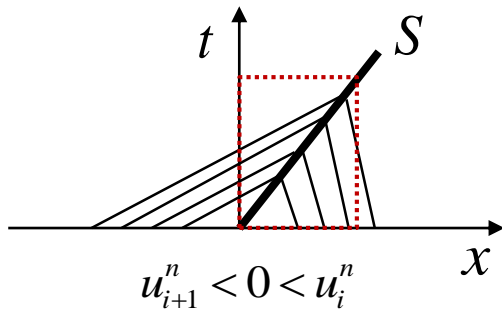
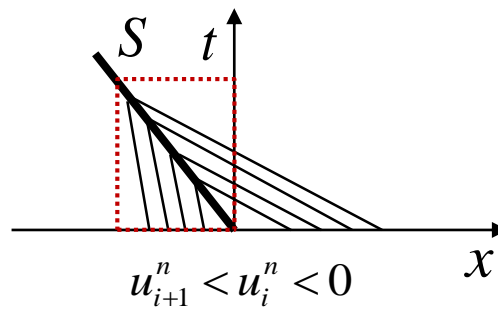
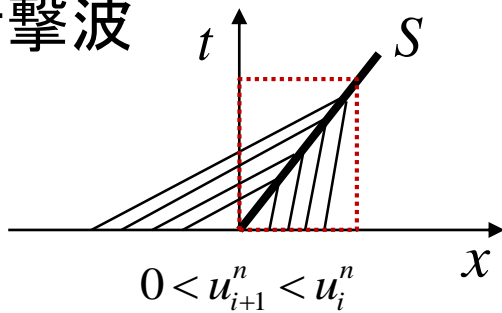


スカラー方程式の解法

□ 非粘性Burgers方程式の解法

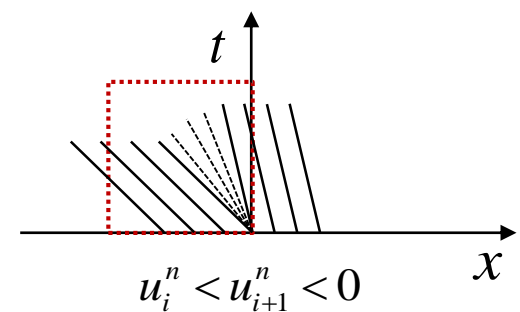
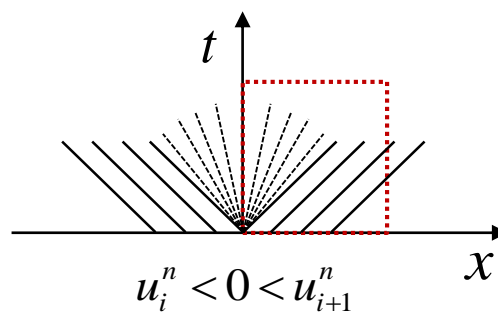
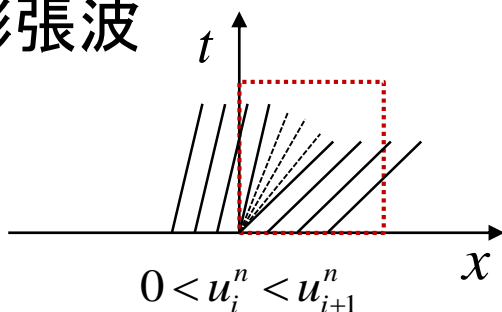
■ 衝撃波管問題

衝撃波



$$S = \frac{f_{i+1} - f_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$

膨張波





スカラー方程式の解法

□ 非粘性Burgers方程式の解法

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$

■ Godunov法

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0$$

$$f_{i+1/2}^* = \begin{cases} (u_i^n)^2 / 2 & \text{if } u_i^n > 0, u_{i+1}^n > 0 \\ (u_{i+1}^n)^2 / 2 & \text{if } u_i^n < 0, u_{i+1}^n < 0 \\ 0 & \text{if } u_i^n < 0 < u_{i+1}^n \\ (u_i^n)^2 / 2 & \text{if } u_i^n > 0 > u_{i+1}^n, S_{i+1/2} > 0 \\ (u_{i+1}^n)^2 / 2 & \text{if } u_i^n > 0 > u_{i+1}^n, S_{i+1/2} < 0 \end{cases}$$



スカラー方程式の解法

□ 非粘性Burgers方程式の解法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

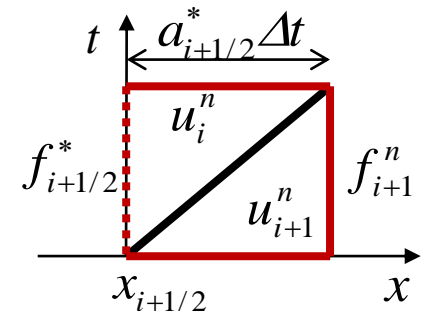
■ 線形近似リーマン解法 (Roe法)

□ 局所的に線形化 \Rightarrow 膨張波を無視

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow f_{i+1/2}^* = \frac{f_{i+1}^n + f_i^n}{2} - \frac{|a_{i+1/2}^*|}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

$$a_{i+1/2}^* = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} = \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2}$$

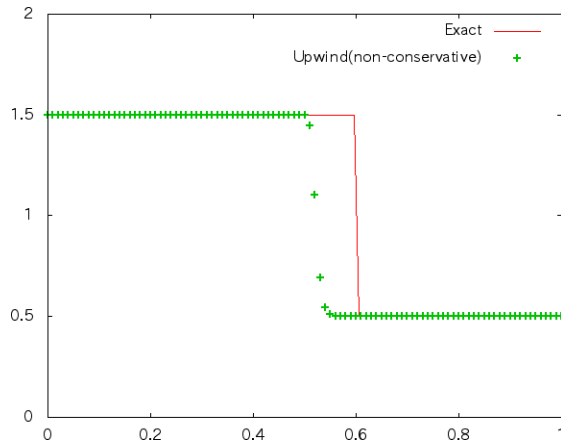




スカラー方程式の解法

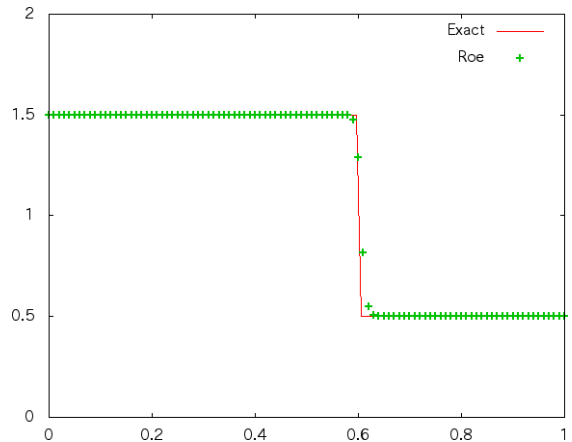
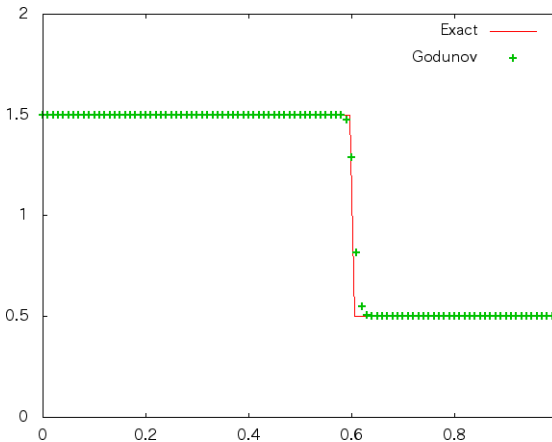
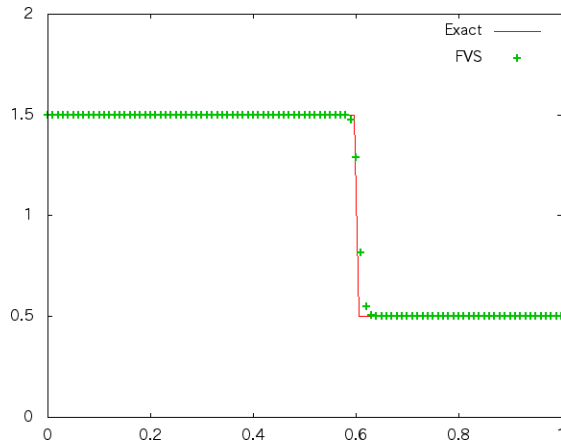
□ 非粘性Burgers方程式の解法

非保存型解法



$$u(x,0) = \begin{cases} 1.5 & \text{for } x < 0.1 \\ 0.5 & \text{for } x \geq 0.1 \end{cases}$$

保存型解法

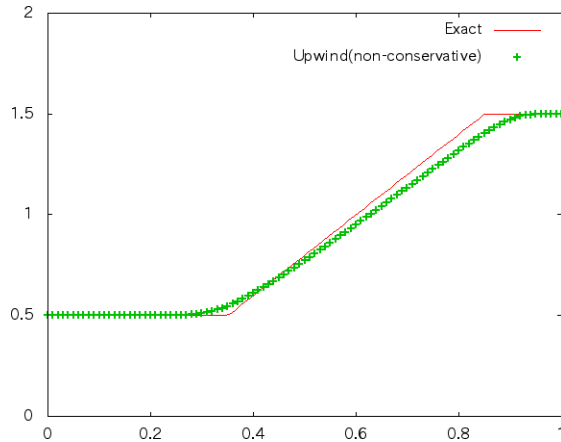




スカラー方程式の解法

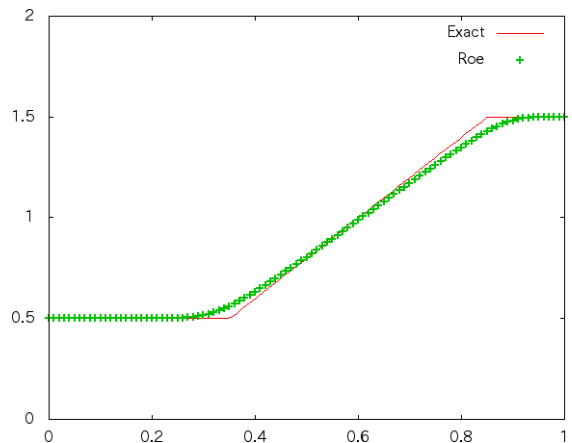
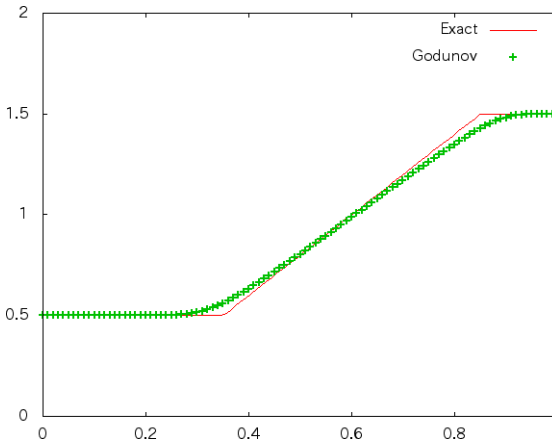
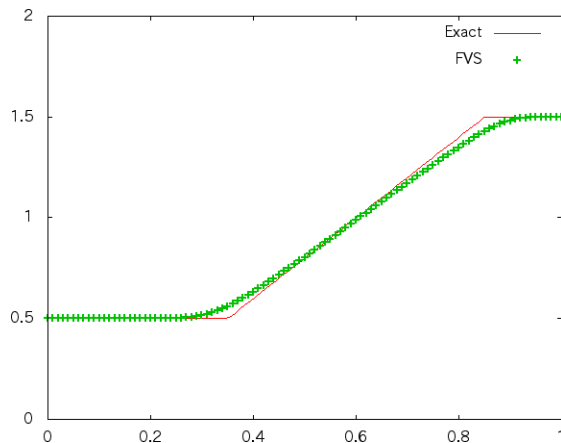
□ 非粘性Burgers方程式の解法

非保存型解法



$$u(x,0) = \begin{cases} 0.5 & \text{for } x < 0.1 \\ 1.5 & \text{for } x \geq 0.1 \end{cases}$$

保存型解法





スカラー方程式の解法

□ 保存型解法

■ Lax-Wendroffの定理[1960]

数値解が収束すれば、その解は保存則の弱解に収束する

■ Hartenのエントロピー条件[1980]

数値解がエントロピー条件を満足し、収束すれば、その解は保存則の物理解に収束する

□ 非保存型解法

■ Hou-LeFlochの定理[1994]

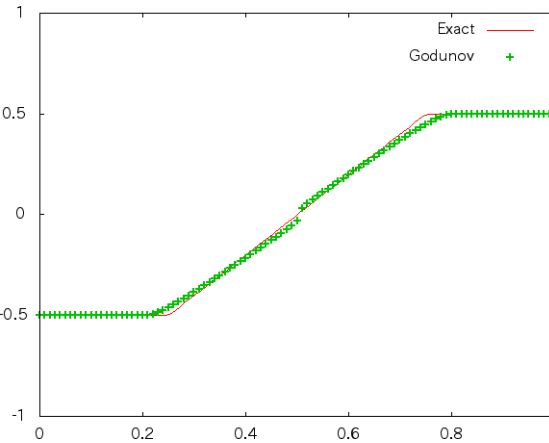
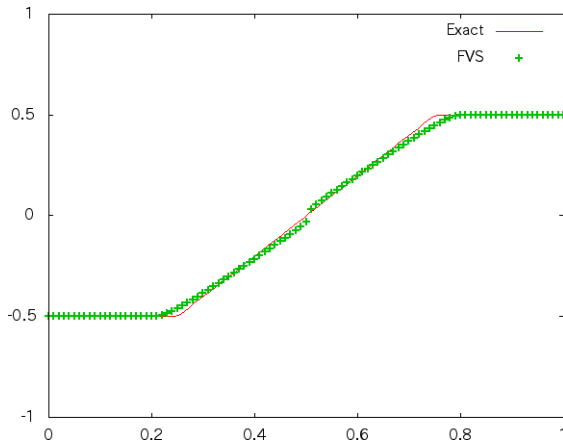
数値解が収束したとしても、衝撃波を含むその解は非物理解に収束する



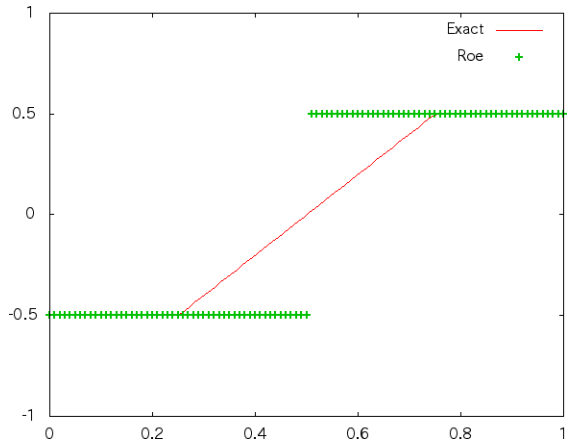
スカラー方程式の解法

□ 非粘性Burgers方程式の解法

FVS法/Godunov法



Roe法



$$u(x,0) = \begin{cases} -0.5 & \text{for } x < 0.5 \\ 0.5 & \text{for } x \geq 0.5 \end{cases}$$

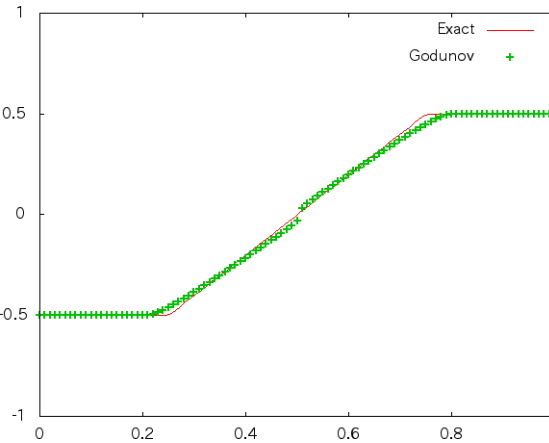
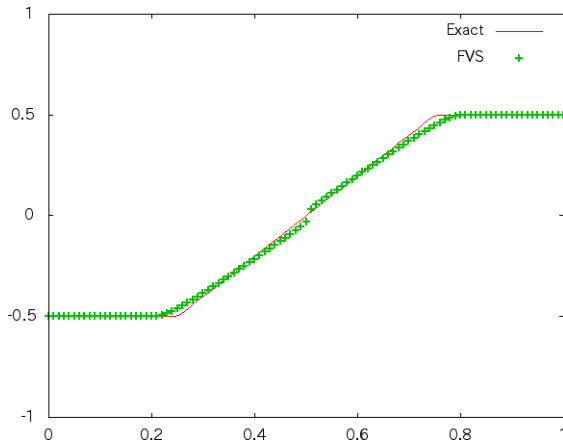
局所線形化により膨張衝撃波
⇒ エントロピー補正



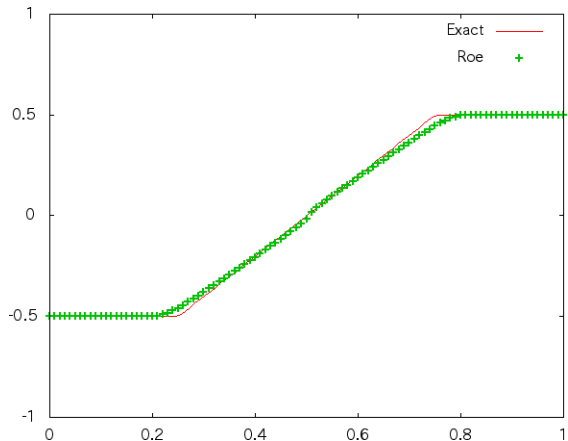
スカラー方程式の解法

□ 非粘性Burgers方程式の解法

FVS法/Godunov法



Roe法+エントロピー補正



色々な補正法があるが、ここでは、

$$|a_{i+1/2}^*| = \begin{cases} |a_{i+1/2}^*| + (a_{i+1}^n - a_i^n)/2 & \text{if } a_i^n < 0 < a_{i+1}^n \\ |a_{i+1/2}^*| & \text{otherwise} \end{cases}$$



システム方程式の解法

□ 双曲型保存則

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{R}^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \mathbf{R}^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$= \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

■ “連立”非線形移流方程式

⇒ スカラー方程式の解法の拡張

$$du \leftrightarrow dW = \mathbf{R}^{-1} dU$$

$$df \leftrightarrow \mathbf{R}^{-1} dF$$



システム方程式の解法

□ 線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad F = AU, \quad A = \text{const.}$$

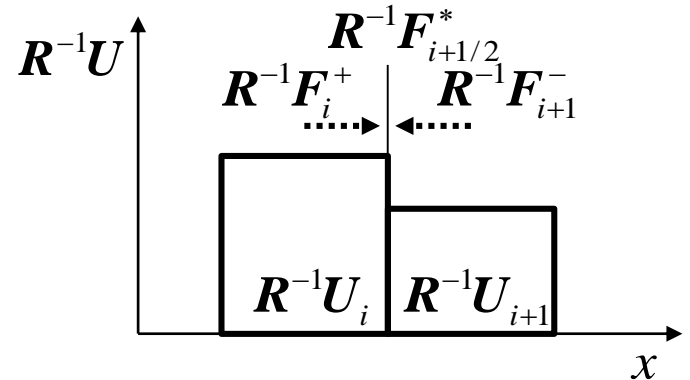
■ FVS法

$$R^{-1}F^{\pm} = \frac{1}{2} \left(R^{-1}F_{\pm} \mid A \mid R^{-1}U \right)$$

$$R^{-1}F_{i+1/2}^* = R^{-1}F_i^+ + R^{-1}F_{i+1}^-$$

$$= \frac{R^{-1}F_{i+1} + R^{-1}F_i}{2} - \frac{1}{2} \left(\mid A \mid R^{-1}U_{i+1} - \mid A \mid R^{-1}U_i \right)$$

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_{i+1} + F_i}{2} - \frac{1}{2} \left(\mid A \mid U_{i+1} - \mid A \mid U_i \right), \quad \mid A \mid \equiv R \mid A \mid R^{-1}$$



もう時間方向のnはやめますね・・・



システム方程式の解法

□ 線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad F = AU, \quad A = \text{const.}$$

■ Godunov法

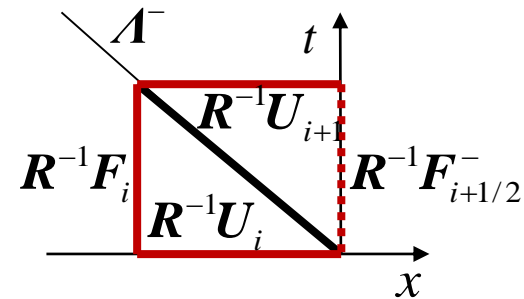
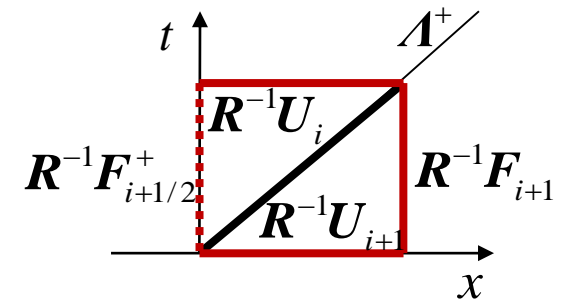
$$R^{-1}F_{i+1/2}^+ = R^{-1}F_{i+1} - A^+ (R^{-1}U_{i+1} - R^{-1}U_i)$$

$$R^{-1}F_{i+1/2}^- = R^{-1}F_i + A^- (R^{-1}U_{i+1} - R^{-1}U_i)$$

$$\text{ここで } A^\pm \equiv (A \pm |A|)/2$$

$$R^{-1}F_{i+1/2}^* = \frac{1}{2} (R^{-1}F_{i+1/2}^+ + R^{-1}F_{i+1/2}^-)$$

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_{i+1} + F_i}{2} - \frac{|A|}{2} (U_{i+1} - U_i), \quad |A| \equiv R |A| R^{-1}$$





システム方程式の解法

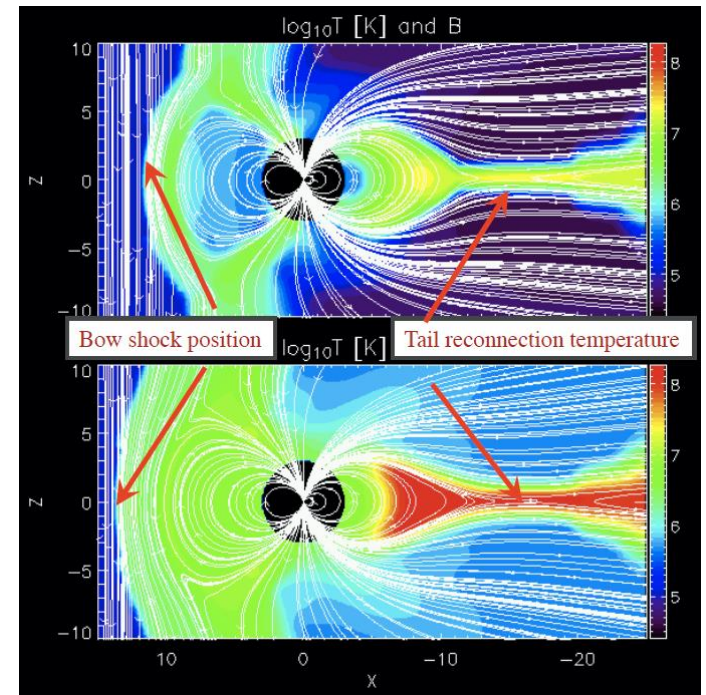
□ 非線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

■ 非保存型解法

数値解が収束したとしても、
不連続解を含む問題では、
非物理的な解

Conservative vs Non-conservative





システム方程式の解法

□ 非線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

- FVS法 [e.g., Steger+, 1981; van Leer, 1991]
一般にはFVS法が適用できるとは限らない
でも、たまたまEuler方程式では、

$$F = AU$$

なので、線形方程式のFVS法と同様に、

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_{i+1} + F_i}{2} - \frac{1}{2} (|A|_{i+1} U_{i+1} - |A|_i U_i)$$

でも、MHD方程式ではだめ



システム方程式の解法

□ 非線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

■ FVS法 [e.g., Steger+, 1981; van Leer, 1991]

あ、でも、なんでも使える簡単なFVS法が！

$$F = F^+ + F^-, \quad F^\pm = \left(F \pm |\lambda|_{\max} U \right) / 2$$

なぜなら、

$$2R^{-1}(\partial F^\pm / \partial U)R = R^{-1}(A \pm |\lambda|_{\max} I)R = A \pm |\lambda|_{\max} I$$

なので、

local Lax-Friedrichs法

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_{i+1} + F_i}{2} - \frac{1}{2} \left(|\lambda|_{\max i+1} U_{i+1} - |\lambda|_{\max i} U_i \right)$$



システム方程式の解法

□ 非線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

■ Godunov法 [Godunov, 1959]

これは中々大変

衝撃波管問題の厳密解(衝撃波、膨張波、混合波の組合せ)を求めるには繰り返し計算が必要
しかも方程式ごとにアルゴリズムを考えねば・・・
という労力にも関わらず、FVS法や近似リーマン解法と精度は変わらなかったでしょ？



システム方程式の解法

□ 非線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

■ Roe法 [Roe, 1981]

局所的に線形化 \Rightarrow 局所的にAを凍結

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_{i+1} + F_i}{2} - \frac{|\bar{A}(U_{i+1}, U_i)|}{2} (U_{i+1} - U_i)$$

Property U

1. $U_i, U_{i+1} \rightarrow U \Rightarrow \bar{A}(U_i, U_{i+1}) \rightarrow A$
2. $F_{i+1} - F_i = \bar{A}(U_{i+1}, U_i)(U_{i+1} - U_i)$
3. 実固有値、線形独立な固有ベクトル



システム方程式の解法

□ 非線形双曲型保存則の解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

■ HLL型近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

HLL法、HLLC法、HLLD法など割りとお手輕
この後すぐ！お楽しみに！



MHD方程式の 近似リーマン解法

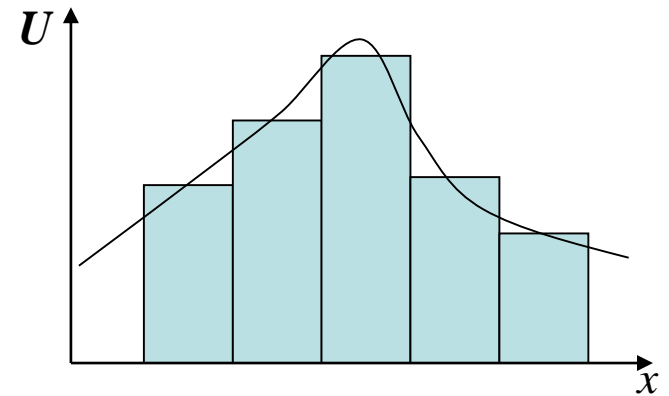


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

■ 物理量を区分定数分布



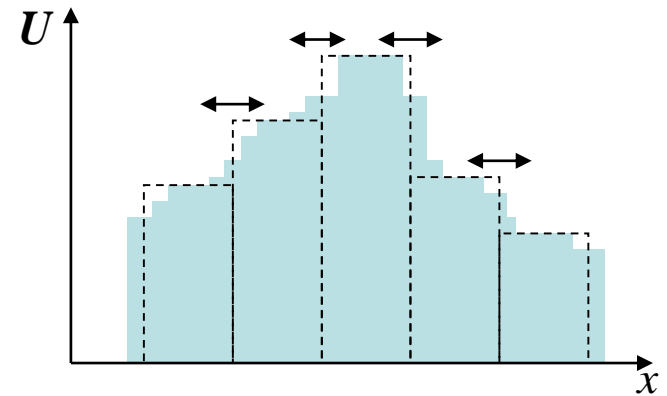


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量を区分定数分布
- 衝撃波管問題の近似解

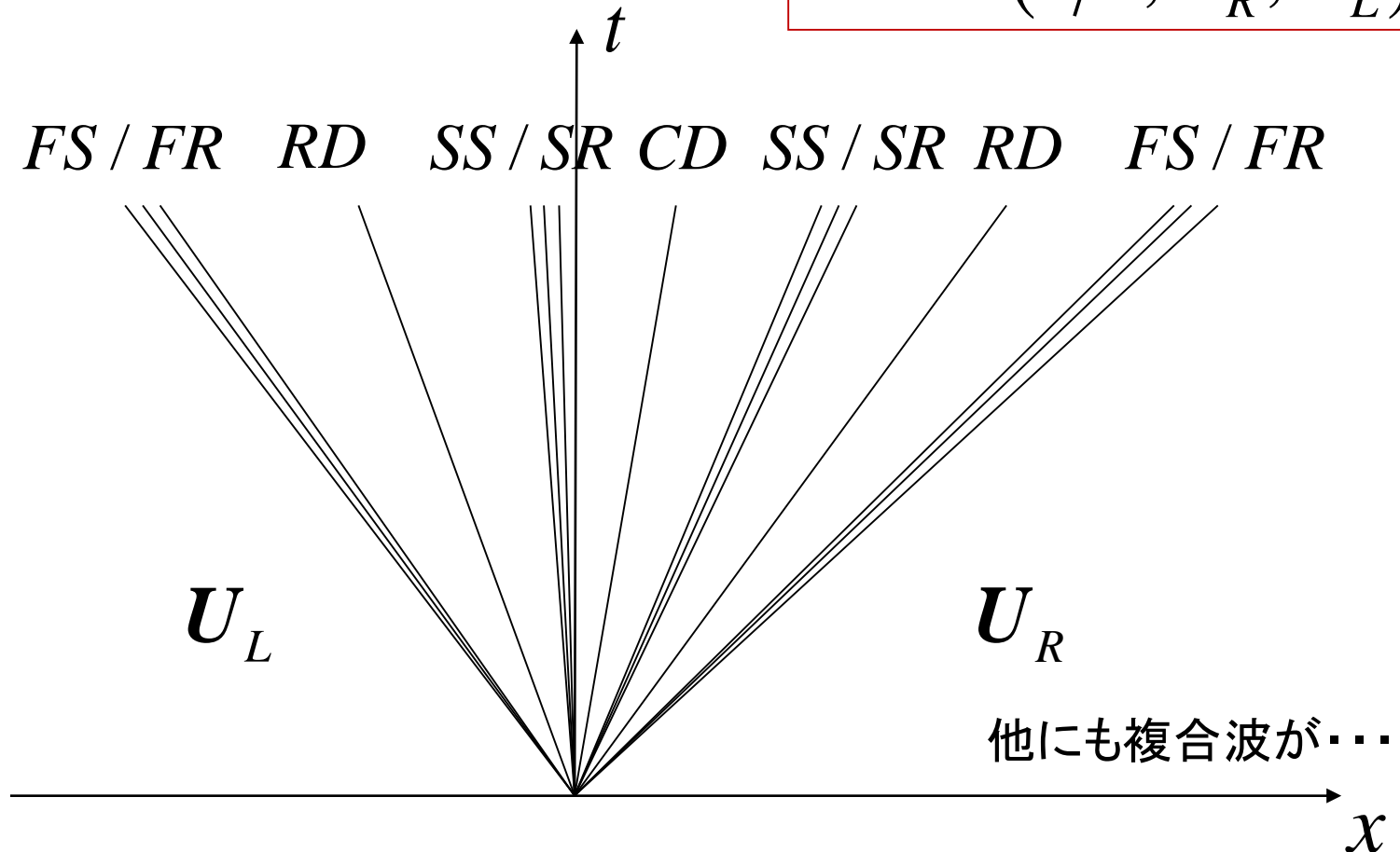




まだ間に合う！近似リーマン解法

□ MHD衝撃波管問題

$$U = U(x/t; U_R, U_L)$$



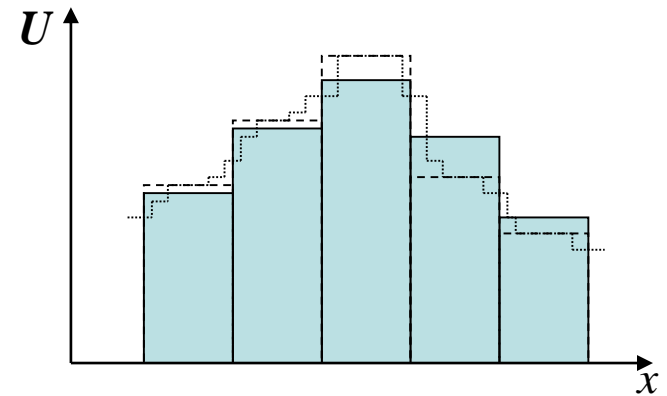


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量を区分定数分布
- 衝撃波管問題の近似解
- 近似解の空間積分



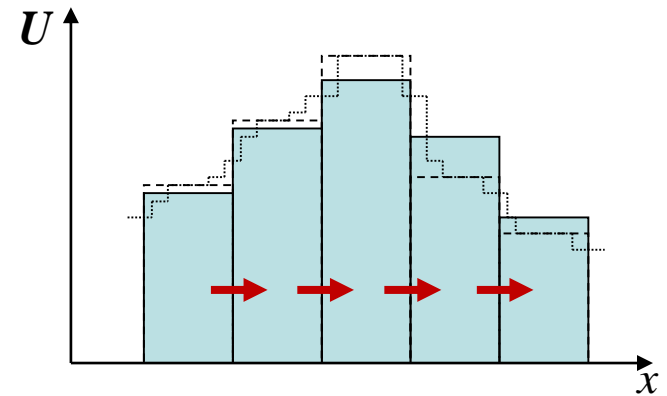


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量を区分定数分布
- 衝撃波管問題の近似解
- 近似解の空間積分
- 数値流束による形式 (時空間保存則から評価)



$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U^{n+1} dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U^n dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{F_{i+1/2}} dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F_{i-1/2} dt = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right) dx - (x_{i+1/2} - x_i) U_i^n + \Delta t (\underline{F_{i+1/2}} - F_i^n) = 0$$

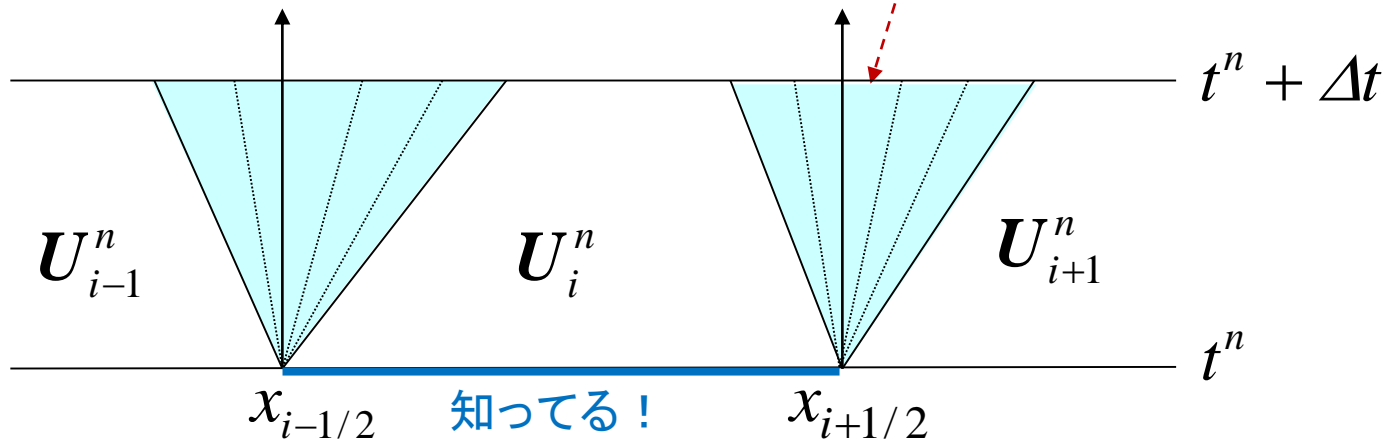


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right)$$





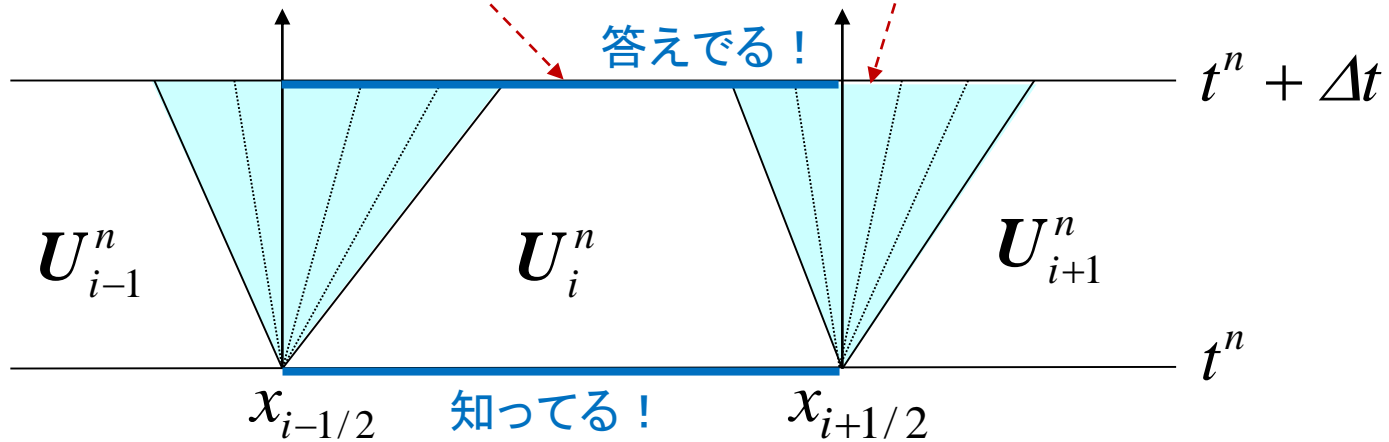
まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$U_i^{n+1} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n + \Delta t) dx$$

$$U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right)$$



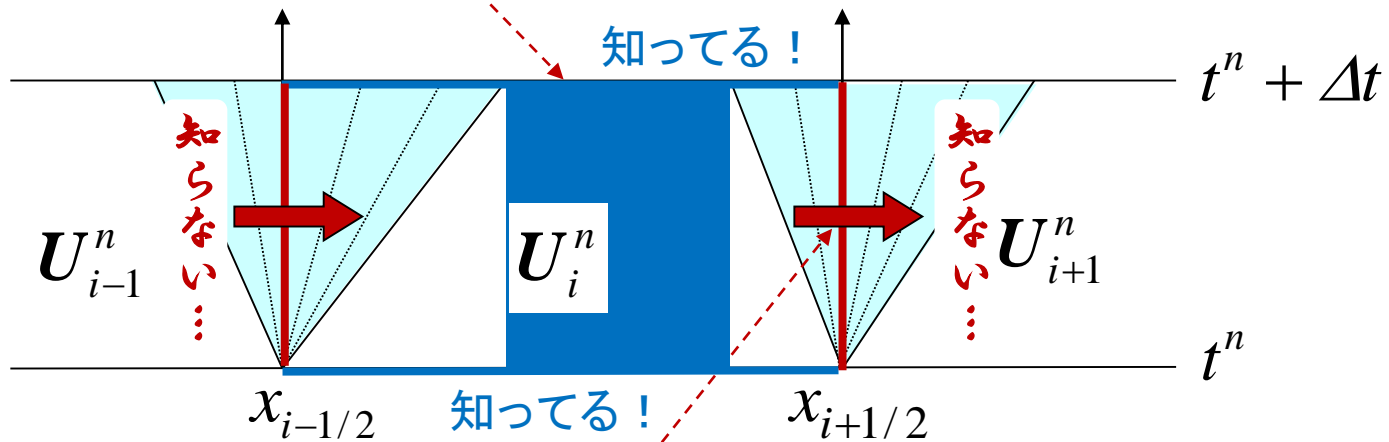


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$U_i^{n+1} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n + \Delta t) dx$$



$$F_{i+1/2} = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} F(x_{i+1/2}, t) dt$$

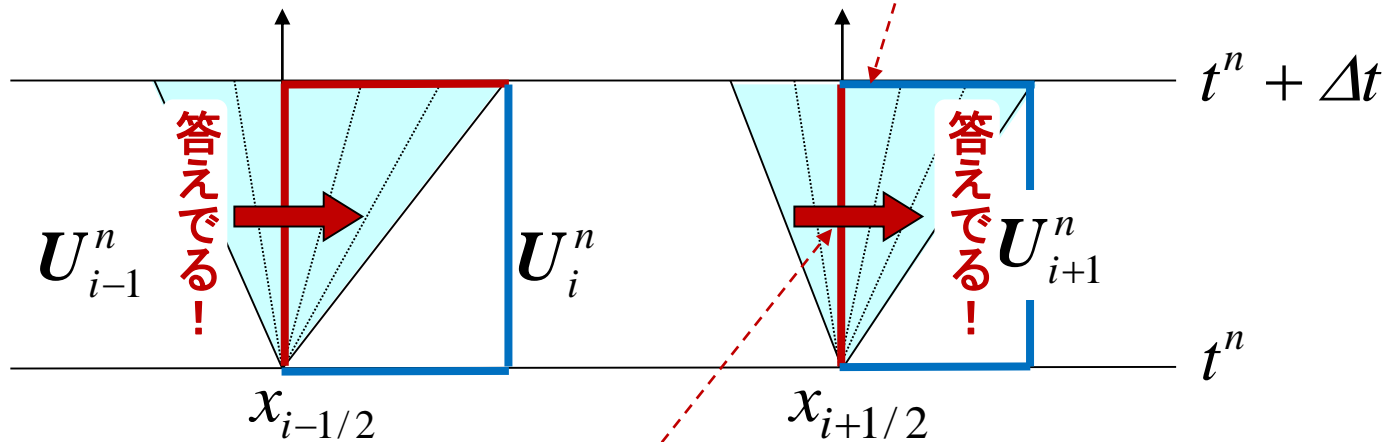


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right)$$



$$F_{i+1/2} = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} F(x_{i+1/2}, t) dt$$

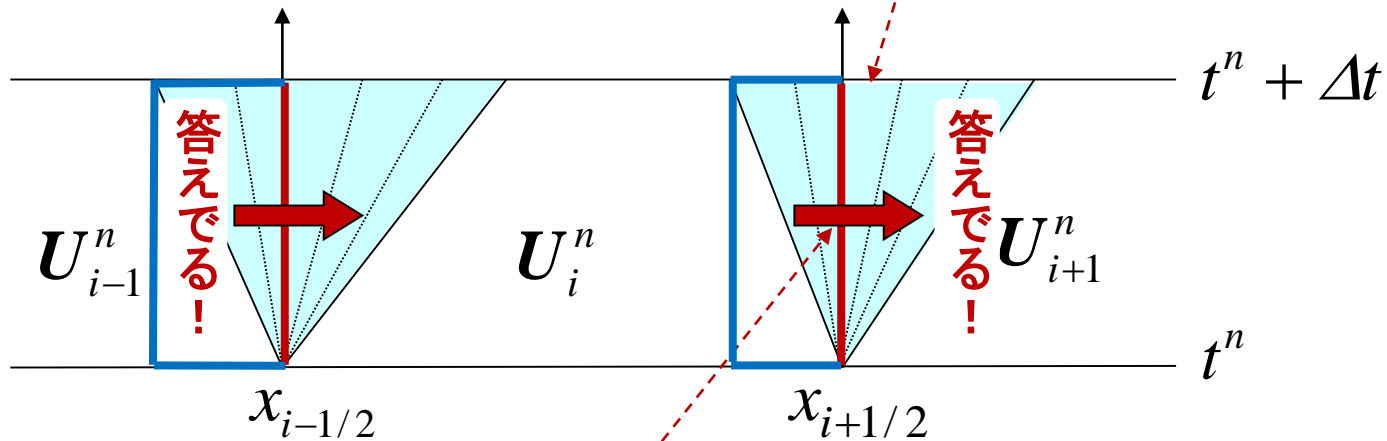


まだ間に合う！ 近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right)$$



$$F_{i+1/2} = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} F(x_{i+1/2}, t) dt$$



線形近似リーマン解法

□ Roe法 [Roe, 1981; Brio & Wu, 1988]

■ 局所的に線形化 (ヤコビアンを凍結)

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_{i+1} + F_i}{2} - \frac{|\bar{A}(U_{i+1}, U_i)|}{2} (U_{i+1} - U_i)$$

ここで $|A| = R |A| R^{-1}$

■ さてと...

MHDの固有ベクトルと固有値がわかればよい
 $\bar{A}(U_{i+1}, U_i)$ を求めるのは一般には面倒だけど



線形近似リーマン解法

□ Roe法 [Roe, 1981; Brio & Wu, 1988]

■ MHD方程式の固有ベクトル [e.g., Brio+, 1988]

$$\mathbf{R}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ 0 \\ 0 \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{u \pm c_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp B_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm B_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \frac{B_z}{\sqrt{\rho}} \\ -\frac{B_y}{\sqrt{\rho}} \\ \mp (vB_z - wB_y) \operatorname{sgn}(B_x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{u \pm c_{f,s}} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c_{f,s} \\ v \mp \frac{B_x B_y c_{f,s}}{\rho c_{f,s}^2 - B_x^2} \\ w \mp \frac{B_x B_z c_{f,s}}{\rho c_{f,s}^2 - B_x^2} \\ \frac{B_y c_{f,s}^2}{\rho c_{f,s}^2 - B_x^2} \\ \frac{B_z c_{f,s}^2}{\rho c_{f,s}^2 - B_x^2} \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + h_{f,s}^\pm \end{pmatrix}$$

$$h_{f,s}^\pm = \frac{c_{f,s}^2}{\gamma - 1} \pm c_{f,s} u \mp \frac{B_x c_{f,s} (vB_y + wB_z)}{\rho c_{f,s}^2 - B_x^2} + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} (c_{f,s}^2 - a^2)$$

固有ベクトルに特異性



線形近似リーマン解法

□ Roe法 [Roe,1981; Brio & Wu, 1988]

■ 固有ベクトルの再規格化 [Brio+,1988; Roe+,1996]

$$\alpha_f^2 \equiv \frac{a^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2}, \quad \alpha_s^2 \equiv \frac{c_f^2 - a}{c_f^2 - c_s^2}$$

$$\alpha_s^2 + \alpha_f^2 = 1, \quad \alpha_s^2 c_s^2 + \alpha_f^2 c_f^2 = a^2, \quad \alpha_f \alpha_s = \frac{a \sqrt{b_y^2 + b_z^2}}{c_f^2 - c_s^2}$$

$$\beta_y \equiv \frac{b_y}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}, \quad \beta_z \equiv \frac{b_z}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}, \quad b_{x,y,z} \equiv \frac{B_{x,y,z}}{\sqrt{\rho}}$$

$$b_y^2 + b_z^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \beta_{y,z} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[Roe+,1996]



線形近似リーマン解法

□ Roe法 [Roe, 1981; Brio & Wu, 1988]

■ 固有ベクトルの再規格化

・・・で色々計算するわけですが、ここに書いてもあれなので参考文献をご参照ください

[1] Brio, Wu, JCP **75**, 400 (1988)

[2] Ryu, Jones, ApJ **442**, 228 (1995)

[3] Roe, Balsara, SIAM J. Appl. Math. **56**, 57 (1996)

[4] Balsara, ApJS **116**, 119 (1998)

[5] Powell, et al., JCP **154**, 284 (1999)

保存変数 \Leftrightarrow 基本変数 \Leftrightarrow 特性変数

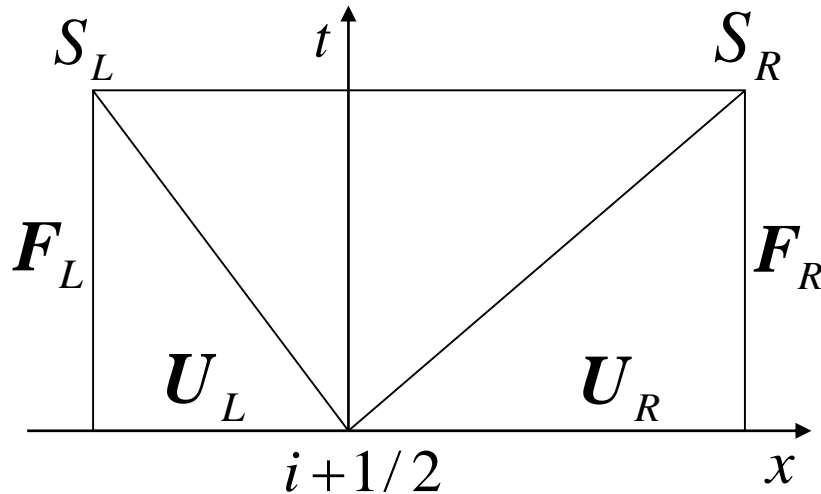
$$\mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{R}_P^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_P}{\partial t} + \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{A}_P \mathbf{R}_P \mathbf{R}_P^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_P}{\partial x} = 0$$
$$d\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} d\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}_P} d\mathbf{V}_P = \mathbf{R}_P^{-1} d\mathbf{V}_P$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似



$S_{R,L}$: 最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

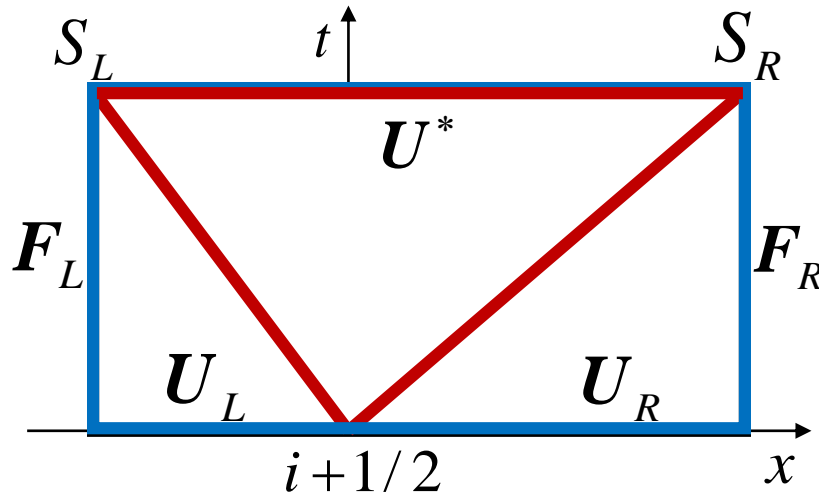
$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似



$S_{R,L}$: 最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

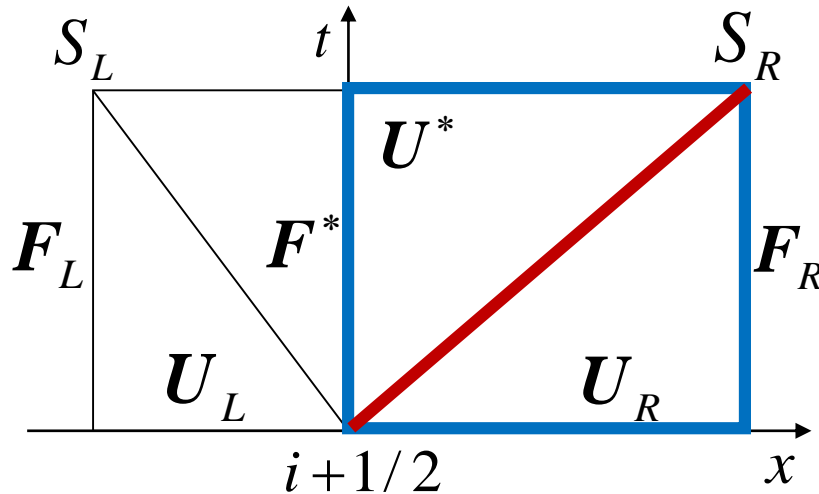
$$\Rightarrow (S_R - S_L)U^* - S_R U_R + S_L U_L + F_R - F_L = 0$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似



$S_{R,L}$: 最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$\Rightarrow F^* = F_{R,L} + S_{R,L} (U^* - U_{R,L}) = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似

$$U^* = \frac{S_R U_R - S_L U_L - F_R + F_L}{S_R - S_L}$$

$$F^* = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \neq F(U^*)$$

- 固有ベクトルの計算不要
- 正值性保存を保証
 - HD [Einfeldt+, 1991] / MHD [Miyoshi+, 2005]
- 接触不連続の分解不可能

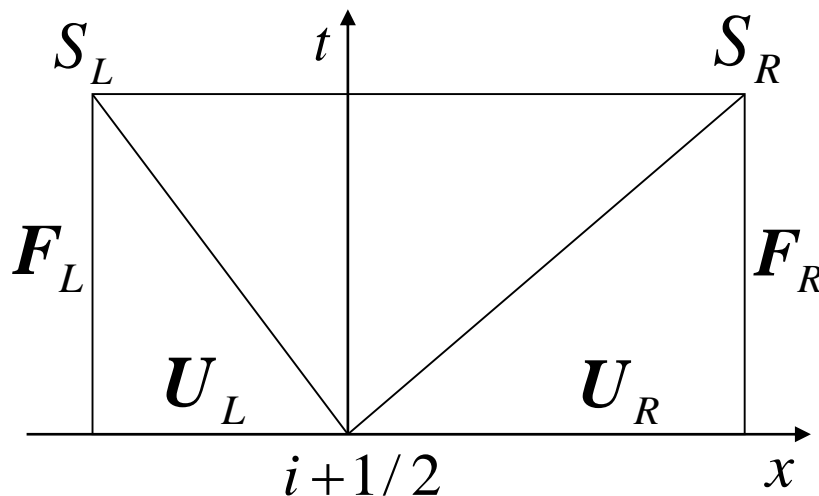


HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

- 衝撃波近似
- N-wave近似

速進磁気音波 × 2、アルフェン波 × 2、遅進磁気音波 × 2、エントロピー波 × 1のどの波を残すべき？



$S_{R,L}$: 速進磁気音波



HLL型近似リーマン解法

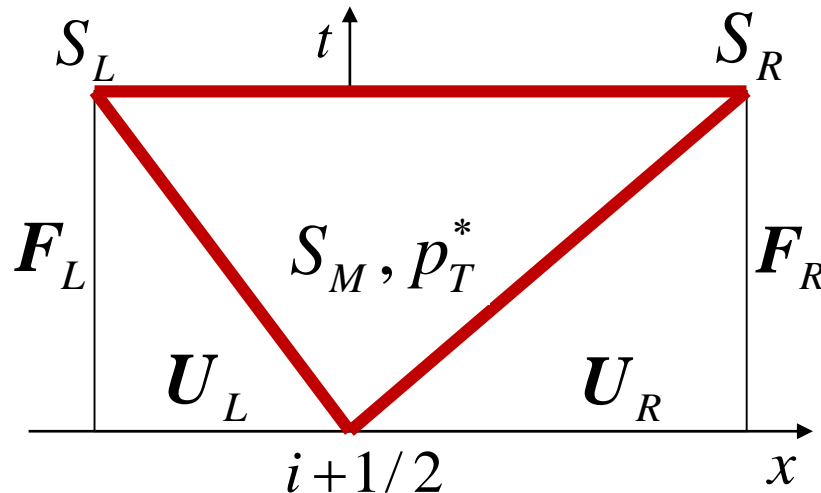
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 衝撃波近似

■ 5-wave近似

□ リーマンファンで法線方向速度一定

□ リーマンファンで全圧力一定



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波



HLL型近似リーマン解法

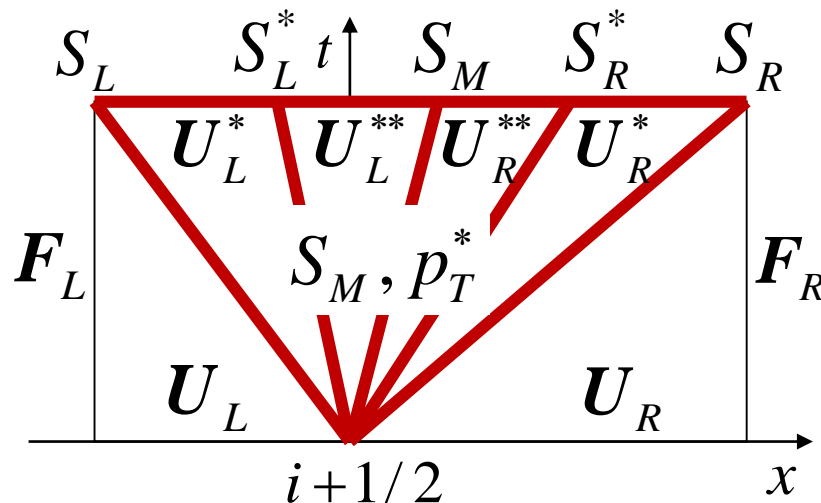
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 衝撃波近似

■ 5-wave近似

□ リーマンファンで法線方向速度一定

□ リーマンファンで全圧力一定



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波

$S_{R,L}^*$: アルフエン波



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ エントロピー波の評価 [Batten+,1997]

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}$$

■ 全圧力の評価



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ S_\alpha \end{array}
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix}
 -
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^* \cdot B_\alpha^*) \end{pmatrix}
 =
 S_\alpha
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix}
 -
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (v_\alpha \cdot B_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ エントロピー波の評価 [Batten+,1997]

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}$$

■ 全圧力の評価

$$\begin{aligned} p_T^* &= p_{TL} + \rho_L (S_L - u_L)(S_M - u_L) \\ &= p_{TR} + \rho_R (S_R - u_R)(S_M - u_R) \\ &= \frac{(S_R - u_R)\rho_R p_{TL} - (S_L - u_L)\rho_L p_{TR} + \rho_L \rho_R (S_R - u_R)(u_R - u_L)}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L} \end{aligned}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$\begin{array}{c} \color{blue}{\rightarrow} \\ S_\alpha \end{array} \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ HLLD解: U_{α}^*

$$\rho_{\alpha}^* = \rho_{\alpha} \frac{S_{\alpha} - u_{\alpha}}{S_{\alpha} - S_M}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix}
 -
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix}
 = S_\alpha
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix}
 -
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ HLLD解: U_α^*

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{t\alpha}^* = \mathbf{v}_{t\alpha} - B_x \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \\ \mathbf{B}_{t\alpha}^* = \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{v}_t = (0, v, w), \mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^* \cdot B_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (v_\alpha \cdot B_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ HLLD解: U_α^*

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{t\alpha}^* = \mathbf{v}_{t\alpha} - B_x \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \\ \mathbf{B}_{t\alpha}^* = \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \end{array} \right. \quad \mathbf{v}_t = (0, v, w), \mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$$

$$e_\alpha^* = \frac{(S_\alpha - u_\alpha)e_\alpha - p_{T\alpha} + p_T^* + B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*)}{S_\alpha - S_M}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\begin{aligned}
 S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_\alpha^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_\alpha^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_\alpha^{**} \\ (e_\alpha^{**} + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^{**} \cdot B_\alpha^{**}) \end{pmatrix} &= S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^* \cdot B_\alpha^*) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



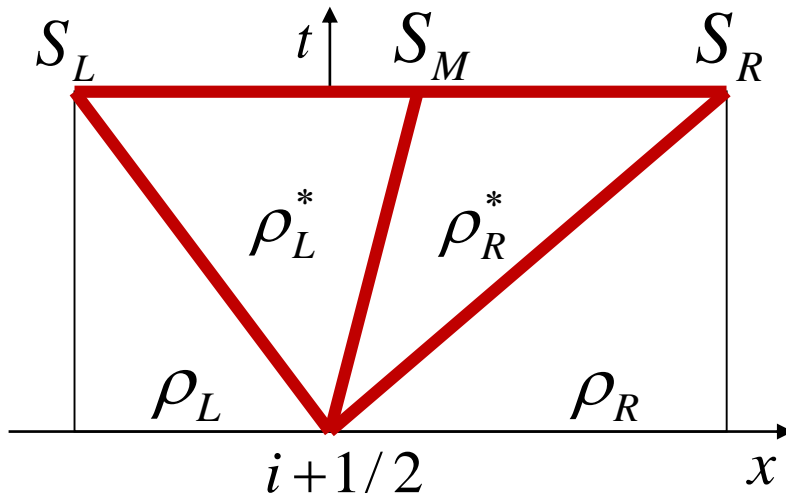
HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^{*}$$

$$S_R^* = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}, S_L^* = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}}$$





HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} S_M \\ \rho_{\alpha}^{**} v_{\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} w_{\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_{\alpha}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^{**} S_M \\ \rho_{\alpha}^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_{\alpha}^{**} v_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} w_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_{\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_{\alpha}^{**} \\ (e_{\alpha}^{**} + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_{\alpha}^{**} \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^{**}) \end{pmatrix} = S_{\alpha}^* \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* S_M \\ \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_{\alpha}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* S_M \\ \rho_{\alpha}^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_{\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_{\alpha}^* \\ (e_{\alpha}^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^*) \end{pmatrix}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\det\left(M\left(\mathbf{v}_{t\alpha}^{**}, \mathbf{B}_{t\alpha}^{**}\right)\right) = 0$$

■ エントロピー波に対するジャンプ条件

$$S_M \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^{**} \\ \mathbf{B}_{tL}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^{**} S_M - B_x \mathbf{B}_{tL}^{**} \\ \mathbf{B}_{tL}^{**} S_M - B_x \mathbf{v}_{tL}^{**} \end{pmatrix} = S_M \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^{**} \\ \mathbf{B}_{tR}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^{**} S_M - B_x \mathbf{B}_{tR}^{**} \\ \mathbf{B}_{tR}^{**} S_M - B_x \mathbf{v}_{tR}^{**} \end{pmatrix}$$

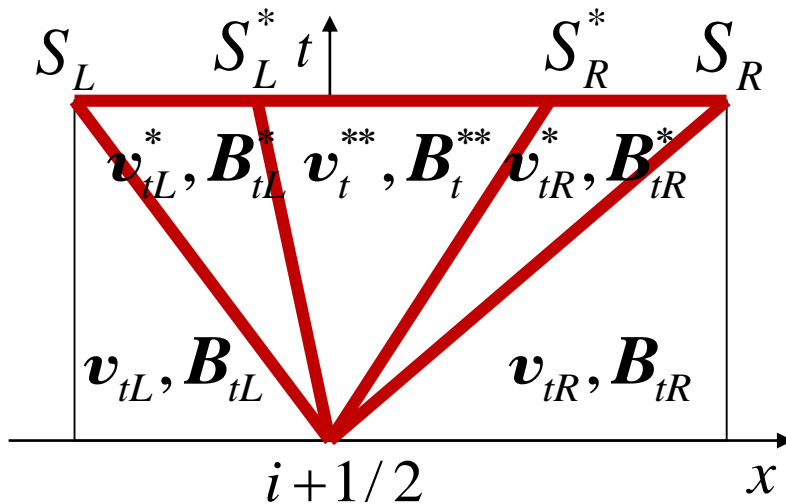
$$\mathbf{v}_{tL}^{**} = \mathbf{v}_{tR}^{**} = \mathbf{v}_t^{**}, \mathbf{B}_{tL}^{**} = \mathbf{B}_{tR}^{**} = \mathbf{B}_t^{**} \quad \text{for } B_x \neq 0$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

$$\begin{aligned}
& (S_R - S_R^*) \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^* \\ \mathbf{B}_{tR}^* \end{pmatrix} + (S_R^* - S_M) \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_t^{**} \\ \mathbf{B}_t^{**} \end{pmatrix} + (S_M - S_L^*) \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_t^{**} \\ \mathbf{B}_t^{**} \end{pmatrix} + (S_L^* - S_{RL}) \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^* \\ \mathbf{B}_{tL}^* \end{pmatrix} \\
& + S_R \begin{pmatrix} \rho_R \mathbf{v}_{tR} \\ \mathbf{B}_{tR} \end{pmatrix} - S_L \begin{pmatrix} \rho_L \mathbf{v}_{tL} \\ \mathbf{B}_{tL} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_R \mathbf{v}_{tR} u_R - B_x \mathbf{B}_{tR} \\ \mathbf{B}_{tR} u_R - B_x \mathbf{v}_{tR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L \mathbf{v}_{tL} u_L - B_x \mathbf{B}_{tL} \\ \mathbf{B}_{tL} u_L - B_x \mathbf{v}_{tL} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$





HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^{*}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{v}_{tL}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}_{tR}^* + (\mathbf{B}_{tR}^* - \mathbf{B}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \\ \mathbf{B}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{B}_{tR}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{B}_{tL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (\mathbf{v}_{tR}^* - \mathbf{v}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \end{array} \right.$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\begin{array}{c} S_\alpha^* \\ \rightarrow \end{array}
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_\alpha^{**} \end{pmatrix}
 -
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_\alpha^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_\alpha^{**} \\ (e_\alpha^{**} + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^{**} \cdot B_\alpha^{**}) \end{pmatrix}
 = S_\alpha^*
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix}
 -
 \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^* \cdot B_\alpha^*) \end{pmatrix}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^{*}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{v}_{tL}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}_{tR}^* + (\mathbf{B}_{tR}^* - \mathbf{B}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \\ \mathbf{B}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{B}_{tR}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{B}_{tL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (\mathbf{v}_{tR}^* - \mathbf{v}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \end{array} \right.$$

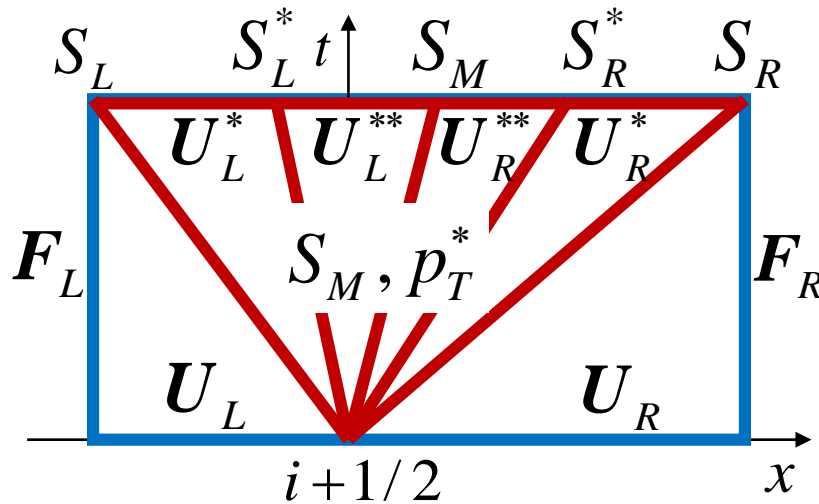
$$e_{\alpha}^{**} = e_{\alpha}^* \mp \sqrt{\rho_{\alpha}^*} (\mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sgn}(B_x) \quad (-: R, +: L)$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

- 衝撃波近似
- 5-wave近似



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波

$S_{R,L}^*$: アルフエン波

$$S_{R,L}(\mathbf{U}_{R,L}^* - \mathbf{U}_{R,L}) = \mathbf{F}_{R,L}^* - \mathbf{F}_{R,L}, \quad S_{R,L}^*(\mathbf{U}_{R,L}^{**} - \mathbf{U}_{R,L}^*) = \mathbf{F}_{R,L}^{**} - \mathbf{F}_{R,L}^*,$$

$$S_M(\mathbf{U}_R^{**} - \mathbf{U}_L^{**}) = \mathbf{F}_R^{**} - \mathbf{F}_L^{**}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx + S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0$$



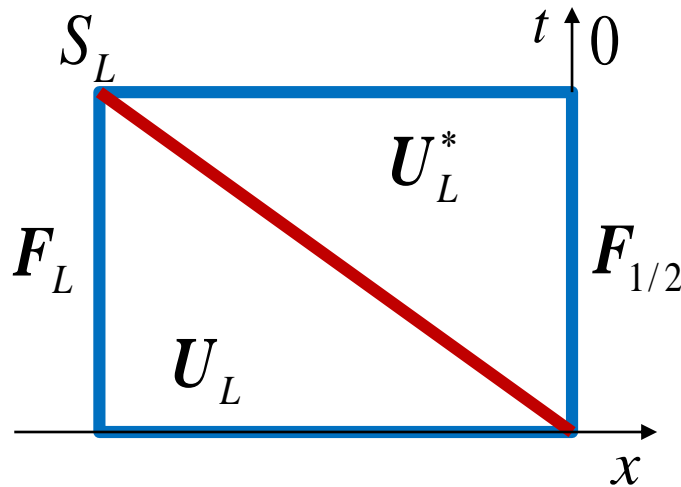
HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 数値流束

$$F_{1/2} = F_L \quad \text{if } S_L \geq 0$$

$$F_{1/2} = F_L + S_L U_L^* - S_L U_L = F_L^* \quad \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*$$





HLL型近似リーマン解法

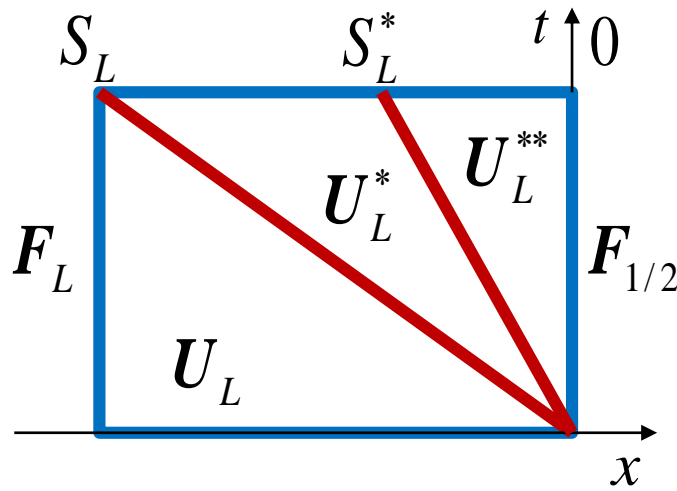
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 数値流束

$$F_{1/2} = F_L \quad \text{if } S_L \geq 0$$

$$F_{1/2} = F_L + S_L U_L^* - S_L U_L = F_L^* \quad \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*$$

$$\begin{aligned} F_{1/2} &= F_L + S_L^* U_L^{**} - (S_L^* - S_L) U_L^* - S_L U_L \\ &= F_L^* + S_L^* U_L^{**} - S_L^* U_L^* = F_L^{**} \quad \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M \end{aligned}$$





HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 数値流束

$$F_{1/2} = \begin{cases} F_L & \text{if } S_L \geq 0 \\ F_L^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^* \\ F_L^{**} & \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M \\ F_R^{**} & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R^* \\ F_R^* & \text{if } S_R^* \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{if } S_R \leq 0 \end{cases}$$

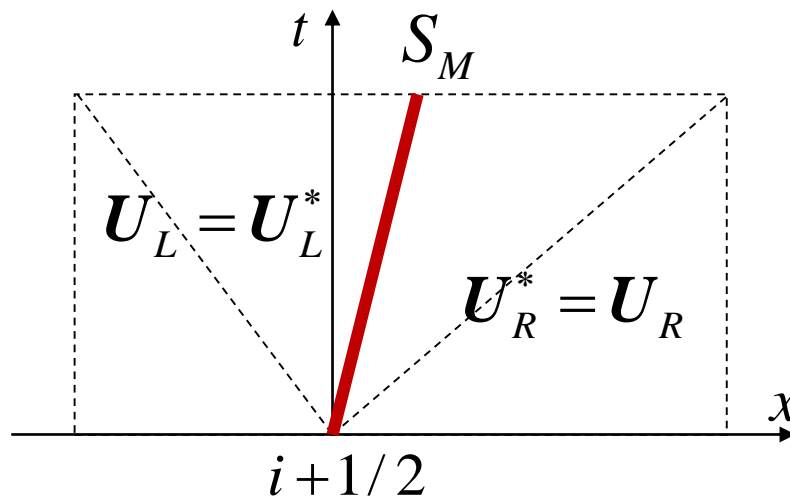
$$F_\alpha^{*/**} = F\left(\rho_\alpha^{*/**}, S_M, v_{t\alpha}^{*/**}, B_x, B_{t\alpha}^{*/**}, e_\alpha^{*/**}, p_T^*\right)$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ 孤立した接線不連続(TD)の分解



$$S_M = u, B_x = 0$$

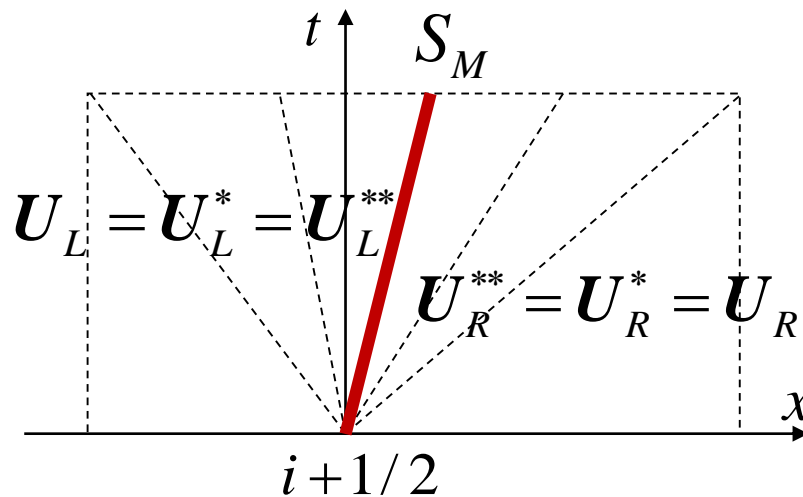
$$S_M [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}]$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連続(CD)の分解



$$S_M = u, B_x \neq 0$$

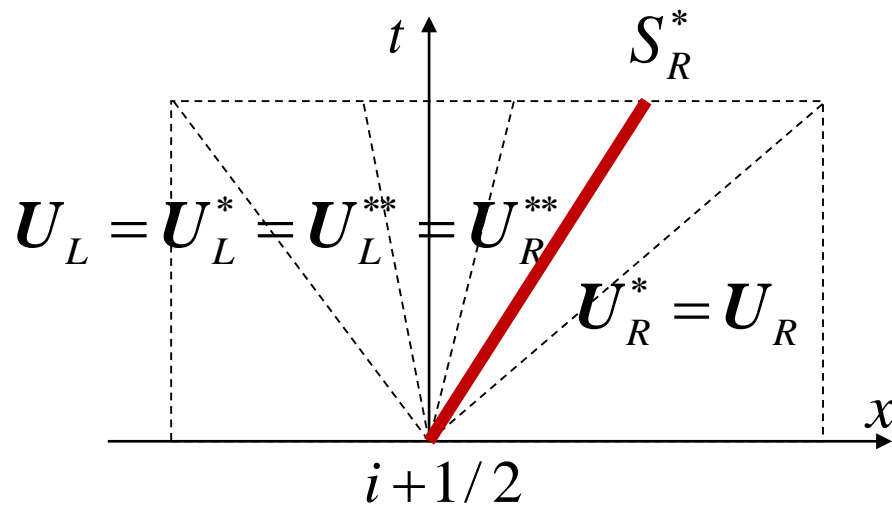
$$S_M[U] = [F]$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連続(CD)の分解
- 孤立した回転不連続(RD)の分解



$$S_R^* = u + \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}, B_x > 0$$

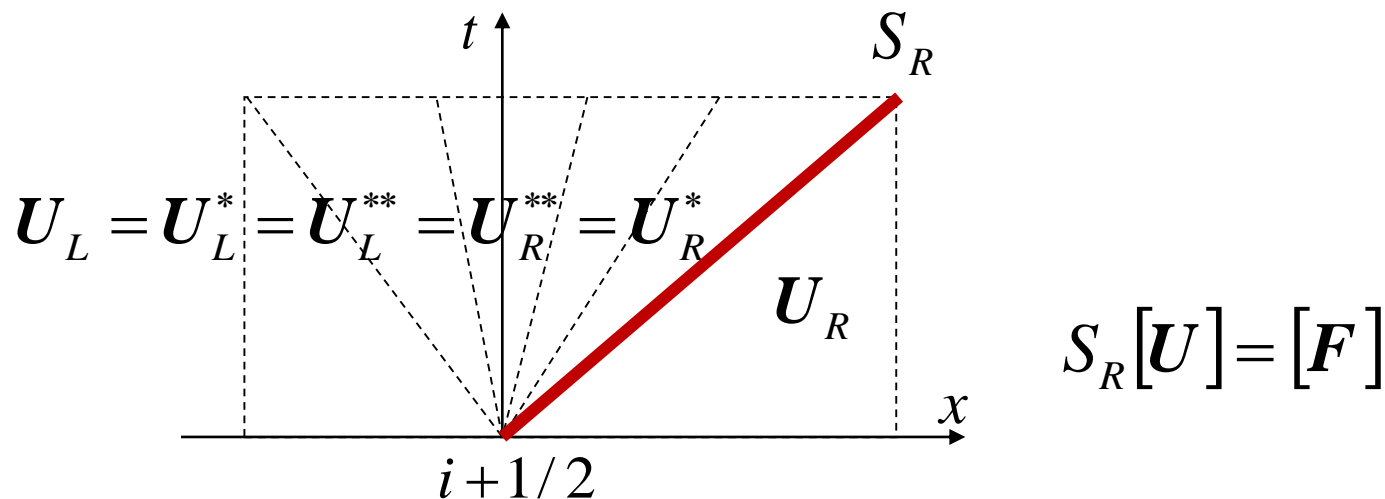
$$S_R^*[U] = [F]$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

- 孤立した接線不連続 (TD) の分解
- 孤立した接触不連続 (CD) の分解
- 孤立した回転不連続 (RD) の分解
- 孤立した速進衝撃波 (FS) の分解





HLL型近似リーマン解法

□ MHDの正值性 [Janhunen,2000]

■ 物理的な解の集合

$$G = \left\{ \mathbf{U} \mid \rho > 0, e - \rho|\mathbf{v}|^2/2 - |\mathbf{B}|^2/2 > 0 \right\}$$

■ 物理的な解の重み付き平均値

$$U_{1,2} \in G \Rightarrow \boxed{U = (1-\theta)U_1 + \theta U_2 \in G} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

$$\rho = (1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2 > 0$$

$$p = (1-\theta)p_1 + \theta p_2$$

$$+ \theta(1-\theta)(\gamma-1) \left(|\Delta\mathbf{v}|^2 \rho_1\rho_2/\rho + |\Delta\mathbf{B}|^2 \right) / 2 > 0$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

■ HLLD解の正值性

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\alpha}^{*} > 0 \\ \rho_{\alpha}^{**} > 0 \\ p_{\alpha}^{*} = (\gamma - 1) \left(e_{\alpha}^{*} - \rho_{\alpha}^{*} |\mathbf{v}_{\alpha}^{*}|^2 / 2 - |\mathbf{B}_{\alpha}^{*}|^2 / 2 \right) > 0 \\ p_{\alpha}^{**} = (\gamma - 1) \left(e_{\alpha}^{**} - \rho_{\alpha}^{**} |\mathbf{v}_{\alpha}^{**}|^2 / 2 - |\mathbf{B}_{\alpha}^{**}|^2 / 2 \right) > 0 \end{array} \right.$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 密度の正值性

$$\rho_R^* = \rho_R^{**} = \frac{\xi}{\eta} \rho_R > 0$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正值性

$$\varphi \equiv \eta \left(e_R^* - \rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2 / 2 - |\mathbf{B}_R^*|^2 / 2 \right)$$

$$= \frac{\rho_R \xi}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \right) \zeta^2 + p_R \zeta + \frac{p_R \xi}{\gamma - 1}$$

$$\geq \frac{\rho_R \xi}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \zeta^2 + p_R \zeta + \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} \equiv \varphi'$$

一生懸命テキストの方に書きました。



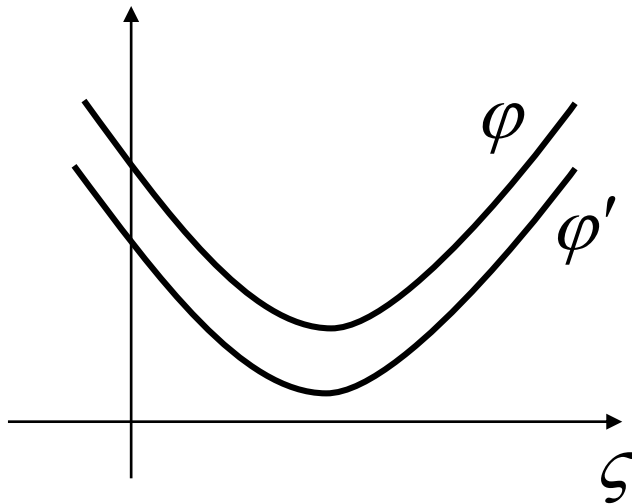
HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正值性

$$D(\varphi') < 0 \Rightarrow \varphi' > 0$$





HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正値性

$$D(\varphi') = p_R^2 - \frac{2\rho_R p_R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \xi^2 < 0$$

$$\xi^2 > \frac{(\gamma - 1)p_R}{2\rho_R} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right)^{-1} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_{fR}^2$$

$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正值性

$$\begin{aligned} p_R^{**} &= (\gamma - 1) \left(e_R^{**} - \rho_R^{**} |\mathbf{v}_R^{**}|^2 / 2 - |\mathbf{B}_R^{**}|^2 / 2 \right) \\ &= p_R^* > 0 \end{aligned}$$

■ 正值性保存の条件

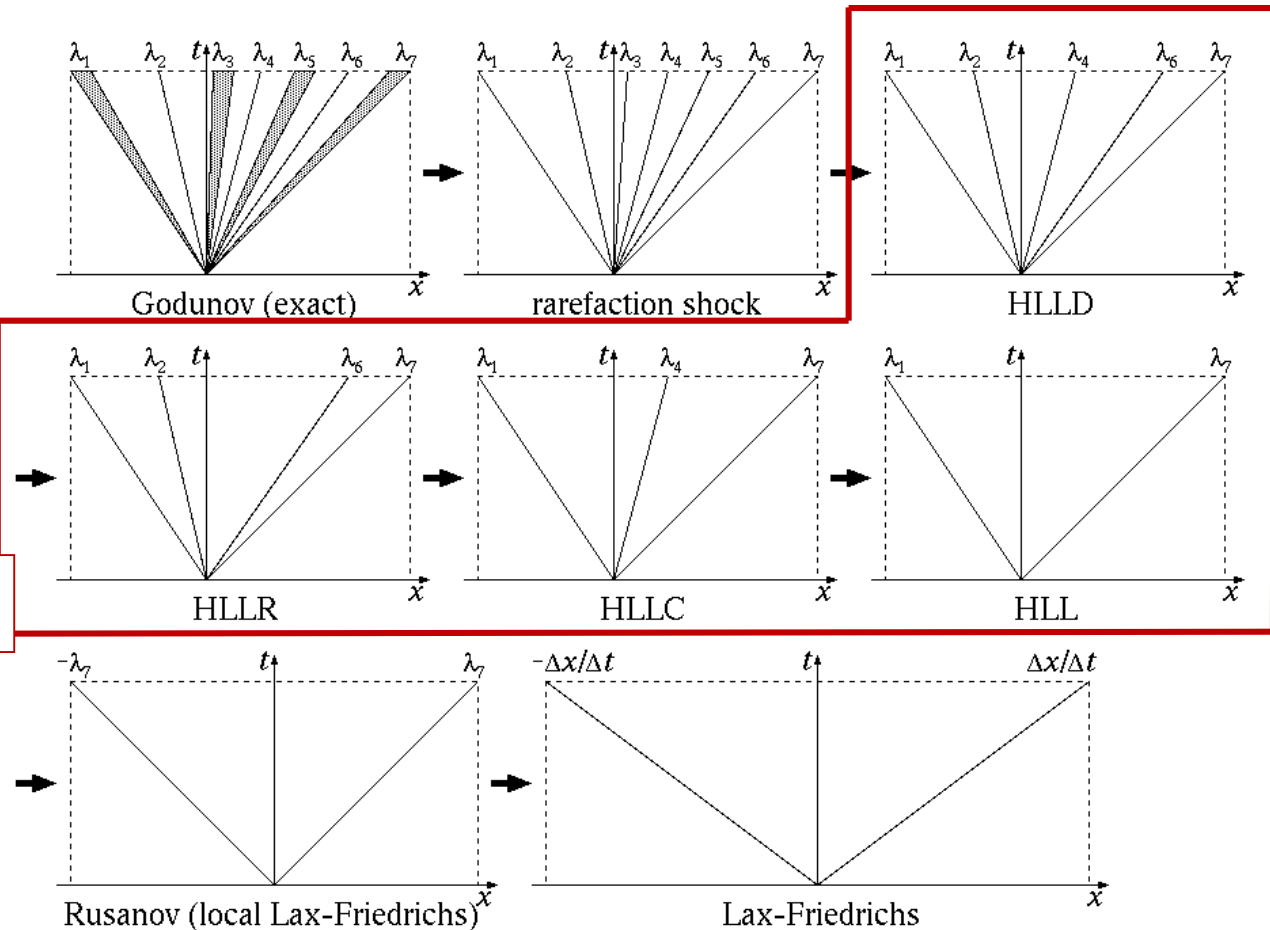
$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR}, \quad S_L < u_L - \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fL}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLL型近似リーマン解法の階層 [Miyoshi+,2007]

- HLLD近似解の重み付き平均値
- 正值性保存



MHD HLL-type



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+,2005]

- 固有ベクトルの計算不要
- 正值性保存を保証
- 接線不連続を厳密に分解
- 接触不連続を厳密に分解
- 回転不連続を厳密に分解
- 速進衝撃波を厳密に分解
- 支配方程式に依存

相対論的MHD [Mignone+, 2009]

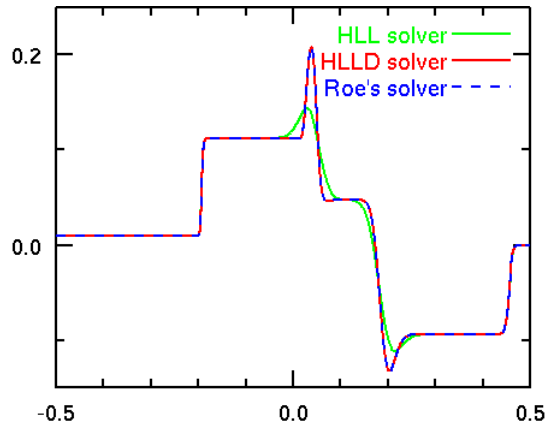
Boris修正MHD [Matsumoto+, 2019]

弾塑性体 [Ortega+, 2014; Zhang+, 2018]

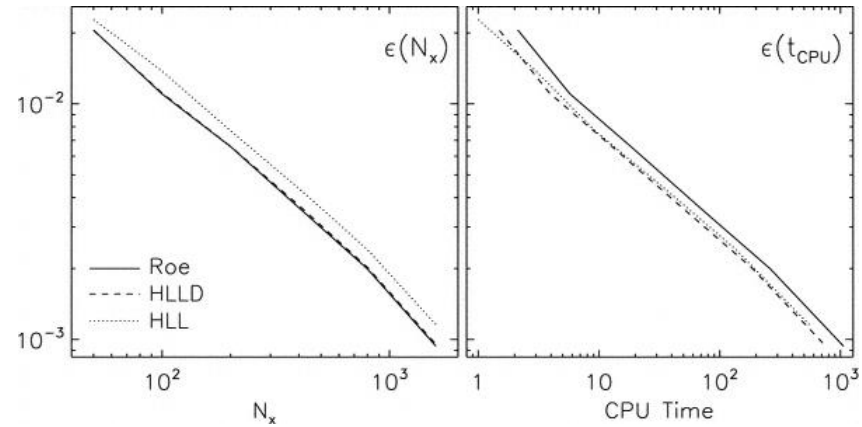


MHD方程式の近似リーマン解法

精度・計算速度の比較・検証

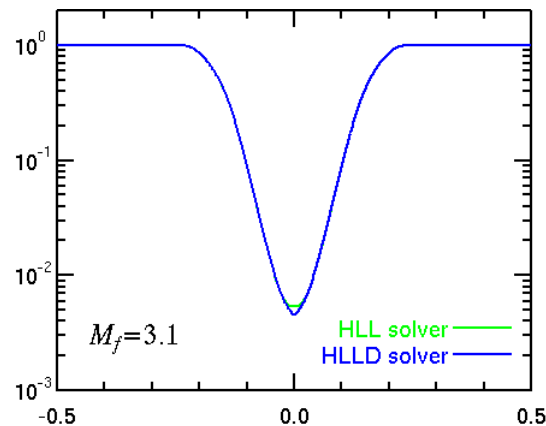
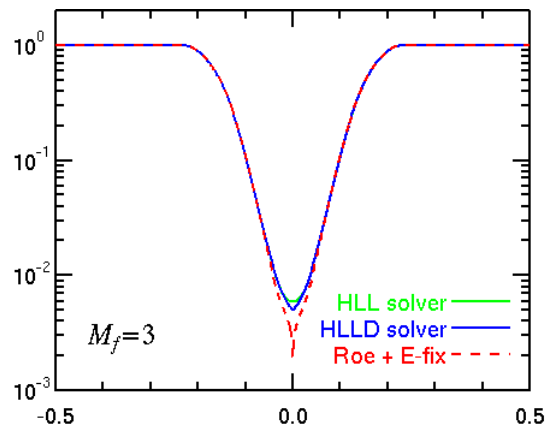


[Miyoshi+,2005]



[Mignone+,2007]

ロバスト性の比較・検証



[Miyoshi+,2007]



MHD方程式の近似リーマン解法

□ その他の数値実験などは論文を参照してください

[1] Miyoshi, Kusano, JCP **208**, 315 (2005)

[2] Mignone, et al., ApJS **170**, 228 (2007)

[3] Stone, et al., ApJS **178**, 137 (2008)

[4] Kritsuk, et al., ApJ **737**:13 (2011)

Table 2
Solver Design Specifications for the Eulerian Methods^a

Name	Base Scheme ^b	Spatial Order ^c	Source Terms ^d	MHD ^e	Time Integration ^f	Directional Splitting ^g
ENZO	FV, HLL	Second	Dedner	Dedner	Second-order RK	Direct
FLASH	FV, HLLD	Second	∂ Derivative	Third-order CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
KT-MHD	FD, CWENO	Third	KT	Third-order CT	Fourth-order RK	Direct
LL-MHD	FV, HLLD	Second	None	Athena CT	Forward Euler	Split
PLUTO	FV, HLLD	Third	Powell	Powell	Fourth-order RK	Direct
PPML	FV, HLLD	Third	None	Athena CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
RAMSES	FV, HLLD	Second	None	2D HLLD CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
STAGGER	FD, Stagger	Sixth	Tensor	Staggered CT	Third-order Hyman	Direct
ZEUS	FD, van Leer	Second	von Neumann	MOC-CT	Forward Euler	Split

Notes.

^a See Section 3 and the indicated sections on each topic for more information.

^b Base method. FD for finite difference, FV for finite volume. FV techniques have the Riemann solver listed, Section 6.3.

^c Spatial order of accuracy, Section 6.1.

^d Artificial Viscosity, Section 6.2. “∂ Derivative” indicates presence of terms proportional to the longitudinal derivative of the magnetic field.

^e MHD method, Section 6.4.

^f Time integration method, Section 6.6.3.

^g Multidimensional technique, Section 6.6.2. “⊥ Reconstruction” indicates presence of transverse derivatives in the interface reconstruction.

現状では、LLD法はほぼ業界標準



数値解法まとめ



数値解法まとめ

□ 線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = au, \quad a = \text{const.}$$

■ FTCS法

$$f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n)$$

■ Lax法

$$f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

■ 風上法

$$f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{|a|}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

■ Lax-Wendroff法

$$f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$



数値解法まとめ

□ 非粘性Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = \frac{u^2}{2}$$

■ Lax法

$$f_{i+1/2}^* = \frac{f_{i+1}^n + f_i^n}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

■ 流束ベクトル分離法 (FVS法)

$$f_{i+1/2}^* = \frac{f_{i+1}^n + f_i^n}{2} - \frac{1}{4} (|u_{i+1}^n| u_{i+1}^n - |u_i^n| u_i^n)$$

■ 線形近似リーマン解法 (Roe法)

$$f_{i+1/2}^* = \frac{f_{i+1}^n + f_i^n}{2} - \frac{1}{4} |u_{i+1}^n + u_i^n| (u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{1}{4} (u_{i+1}^n - u_i^n)^2$$

エントロピー補正



数値解法まとめ

□ 双曲型システム方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{R}, \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

■ Lax法

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n)$$

■ Local Lax-Friedrichs法

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n}{2} - \frac{|\lambda|_{i+1/2}^{\max}}{2} (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) \quad |\lambda|^{\max} \equiv \max_j (|\lambda_j|)$$

■ Local Lax-Friedrichs法 (FVS法)

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n}{2} - \frac{1}{2} \left(|\lambda|_{i+1}^{\max} \mathbf{U}_{i+1}^n - |\lambda|_i^{\max} \mathbf{U}_i^n \right)$$



数値解法まとめ

□ 双曲型システム方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{R}, \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

■ 流束ベクトル分離法 (Steger-Warming FVS法)

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i}{2} - \frac{1}{2} (|\mathbf{A}|_{i+1} \mathbf{U}_{i+1} - |\mathbf{A}|_i \mathbf{U}_i)$$

ただし、 $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{U}$

■ 線形近似リーマン解法 (Roe法)

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i}{2} - \frac{|\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_i)|}{2} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)$$



数値解法まとめ

□ 双曲型システム方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad A = \frac{\partial F}{\partial U}, \quad AR = \Lambda R, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

■ HLL近似リーマン解法

$$F_{i+1/2}^* = \frac{S_R F_i^n - S_L F_{i+1}^n}{S_R - S_L} + \frac{S_R S_L (U_{i+1}^n - U_i^n)}{S_R - S_L}$$

$$S_L = \min(\lambda_{1i}, \lambda_{1i+1}, 0), \quad S_R = \max(\lambda_{mi}, \lambda_{mi+1}, 0) \quad \text{など}$$

■ HLLC / HLLD近似リーマン解法

■ その他

van Leer / Hänel FVS法 (Euler方程式)

AUSM型法 など

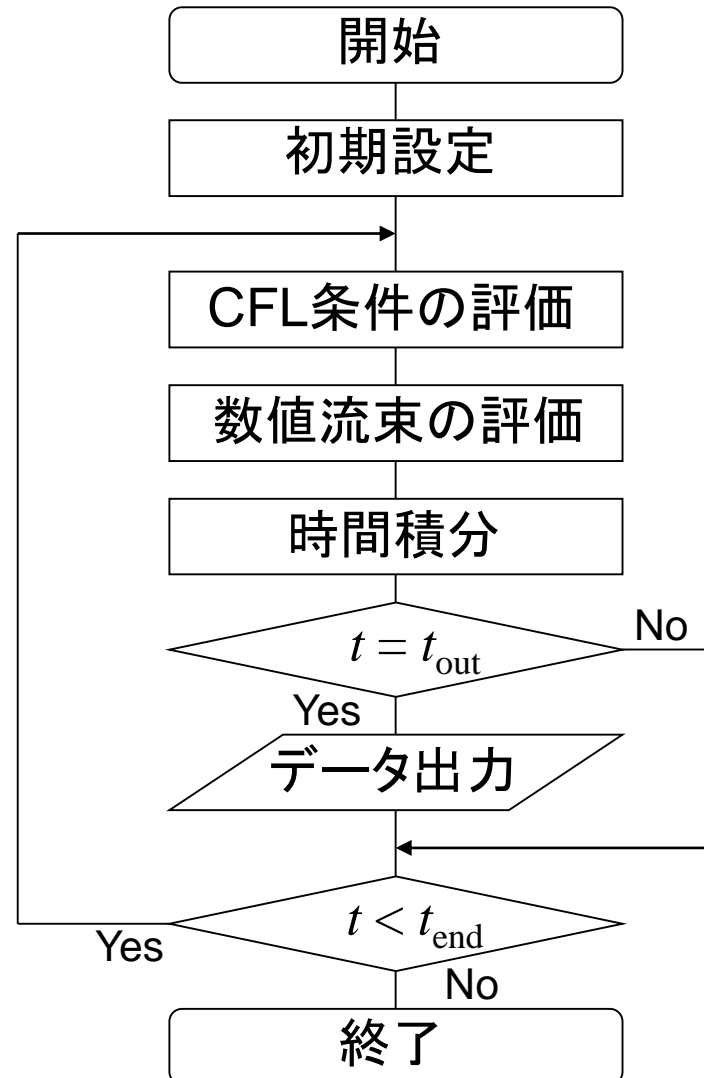


フローチャート



フローチャート

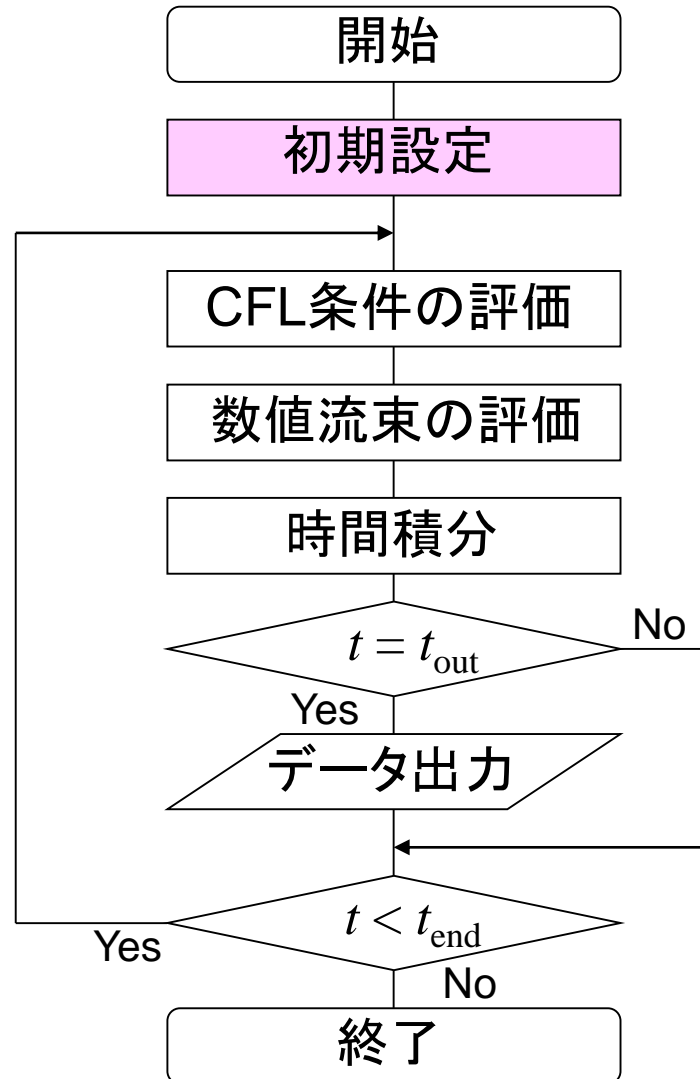
□ 基本手順





フローチャート

□ 基本手順



パラメータ

$$\gamma, \eta, \dots$$

グリッド

$$x_i, \Delta x, \dots$$

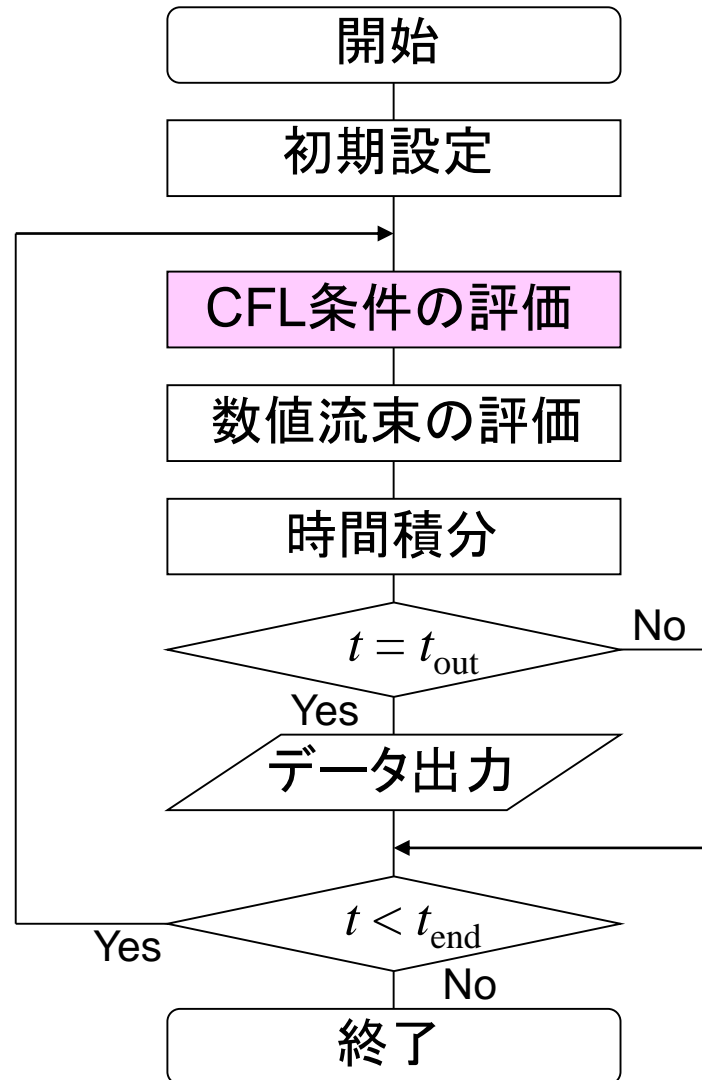
初期条件

$$U(x_i, t = 0)$$



フローチャート

□ 基本手順



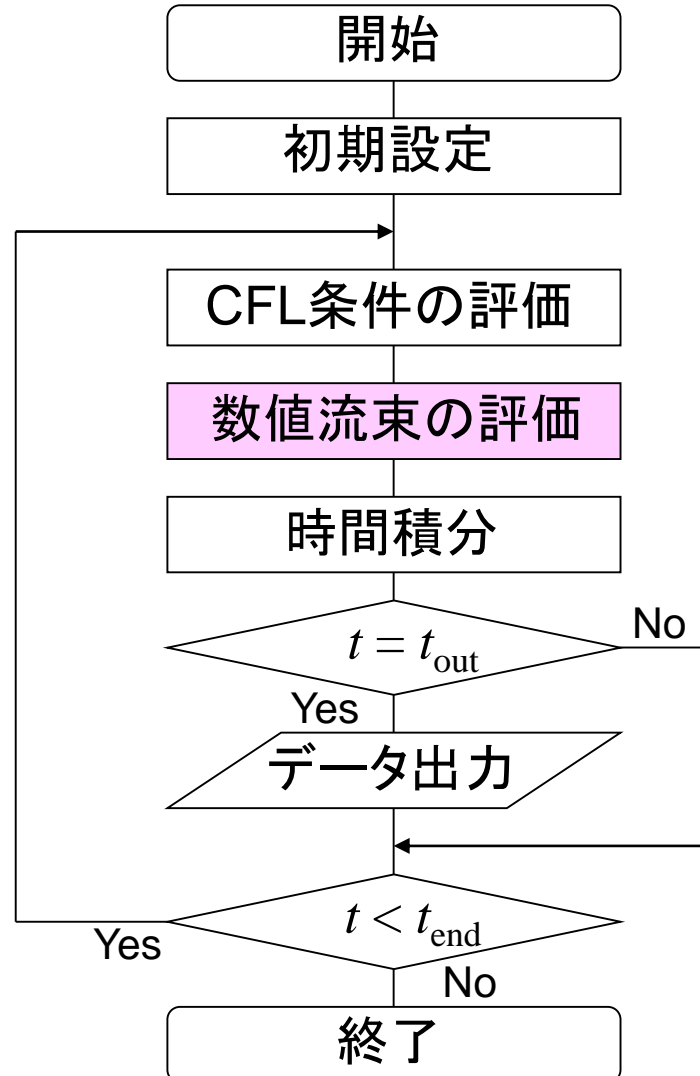
$$\lambda_i = |u_i| + c_{fi}$$

$$\Delta t = c_{CFL} \frac{\Delta x}{\max \lambda_i}$$



フローチャート

□ 基本手順



for $i = 1, \dots, m + 1$

$$U_L \leftarrow U_{i-1}$$

$$U_R \leftarrow U_i$$

$$F_{1/2}(U_L, U_R)$$

※プログラミングのポイント:

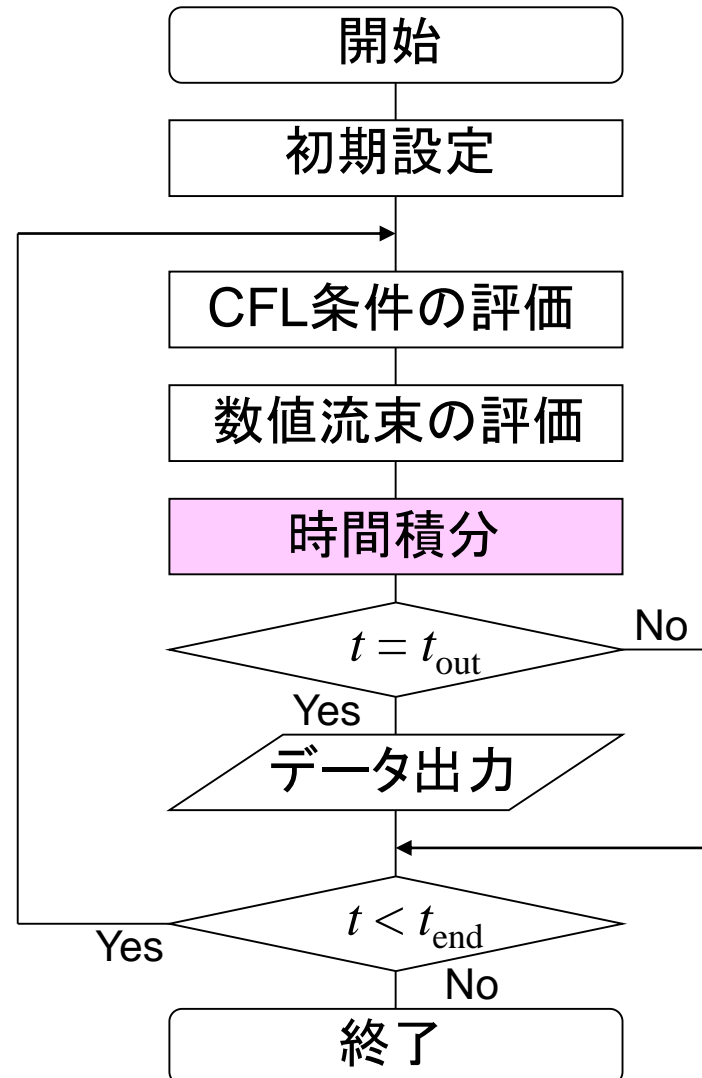
数値流束のインデックスは
半整数、配列は整数のみ

$$\begin{array}{c} U[m] \\ F[m+1] \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \boxed{i-1} & \boxed{i} & \boxed{i+1} & \boxed{i+2} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ i-1 & i & i+1 & i+2 & i+3 \end{array}$$



フローチャート

□ 基本手順



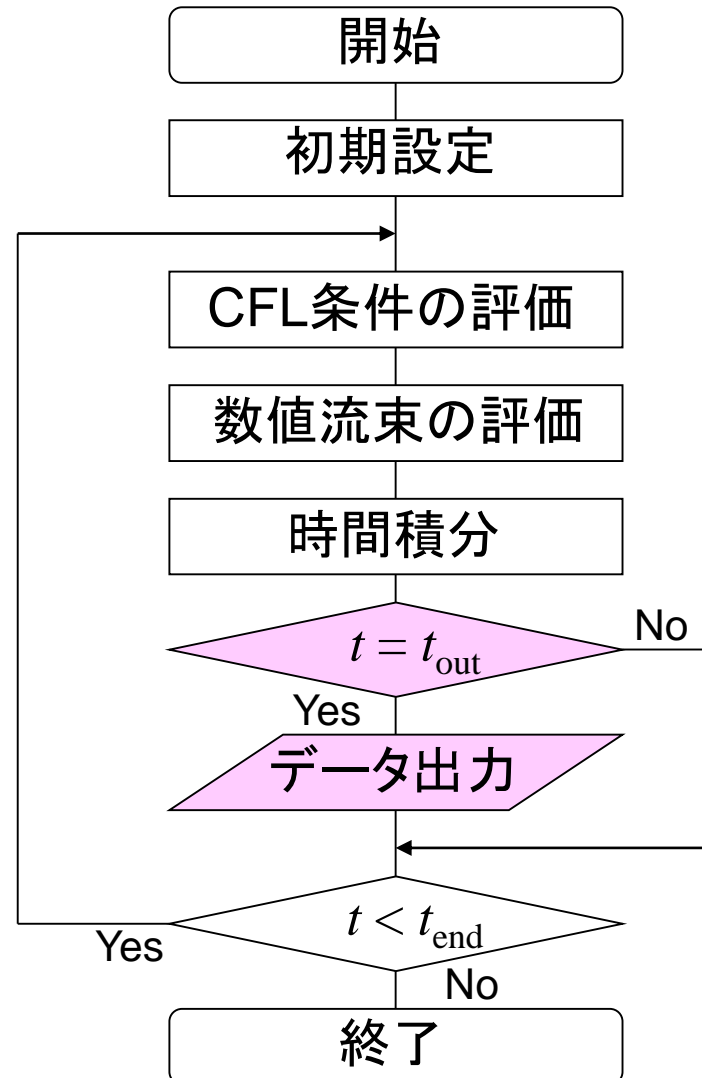
for $i = 1, \dots, m$

$$U_i \leftarrow U_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta F$$



フローチャート

□ 基本手順



if $t > t_{out}$ then

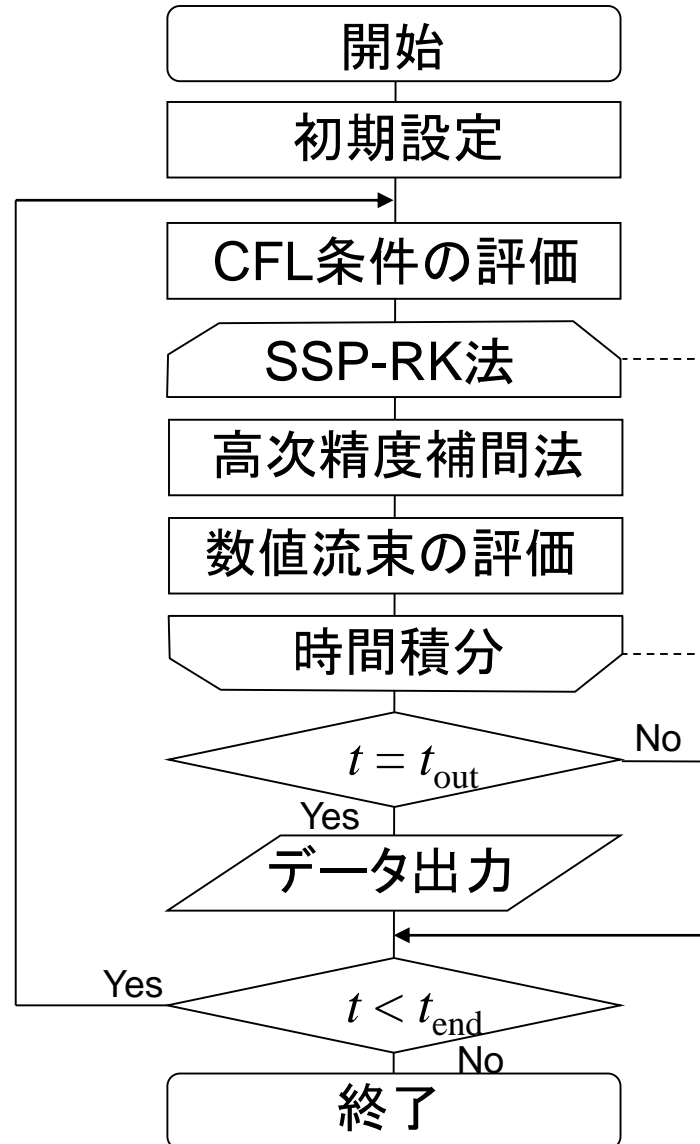
Data Output

$$t_{out} \leftarrow t_{out} + \Delta t_{out}$$



フローチャート

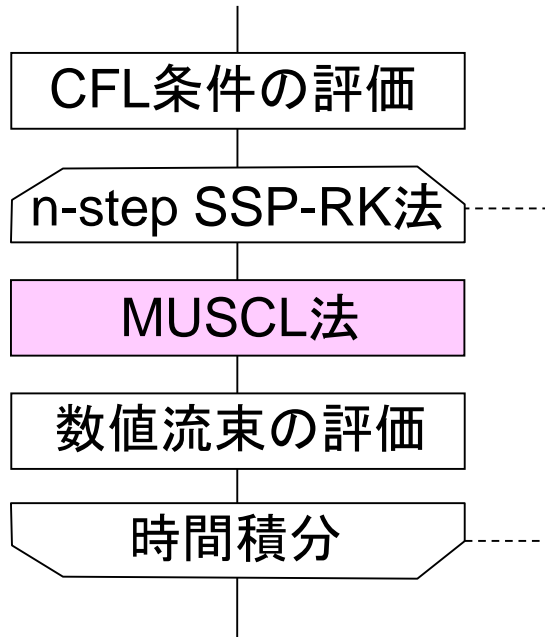
□ 高次精度化





フローチャート

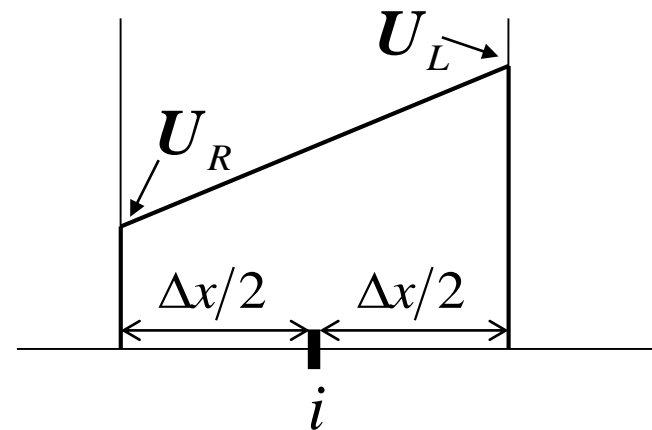
□ MUSCL法



for $i = 0, \dots, m + 1$

$$U_R \leftarrow U_i - \frac{\Delta x}{2} \text{Lim} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)$$

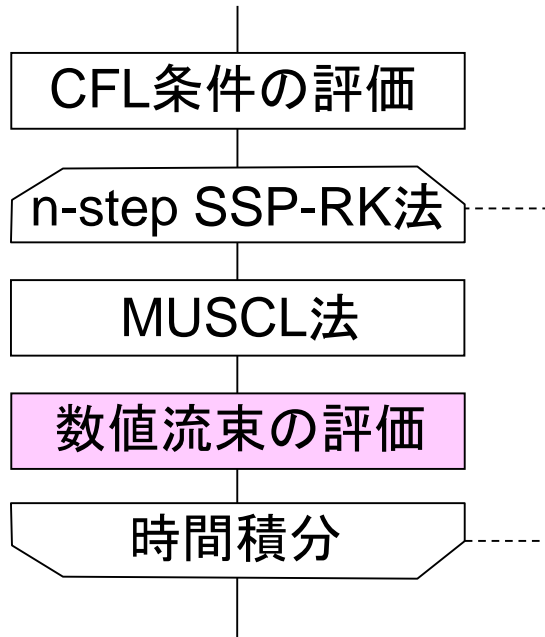
$$U_L \leftarrow U_i + \frac{\Delta x}{2} \text{Lim} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)$$





フローチャート

□ MUSCL法



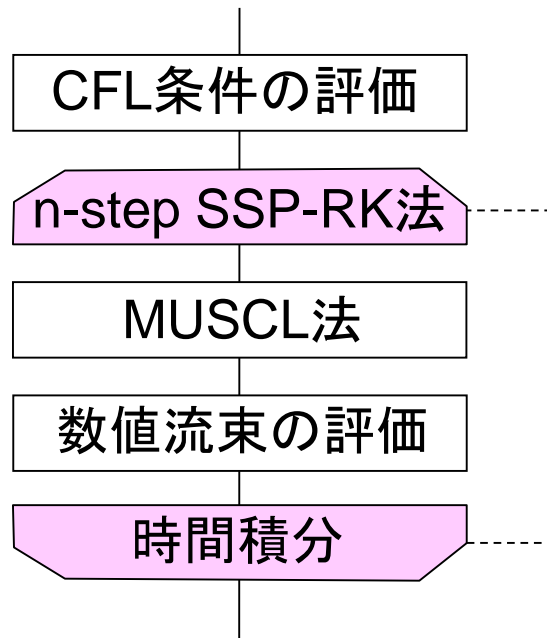
for $i = 1, \dots, m + 1$

$$F_{1/2}(U_L, U_R)$$



フローチャート

□ MUSCL法



(2nd-order SSP (TVD) -RK)

$$U^{(1)} = U^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta F(U^n)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2} U^n + \frac{1}{2} U^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta F(U^{(1)})$$

(3rd-order SSP (TVD) -RK)

$$U^{(1)} = U^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta F(U^n)$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U^{(1)} - \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta F(U^{(1)})$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U^{(2)} - \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta F(U^{(2)})$$



フローチャート

- FV-WENO法など変数補間で高次精度化を実現する数値解法は同様のフローチャートです。
 - 数値流束を高次精度補間する数値解法もあります。
 - 補間の実装は結構面倒です。飯島先生よろしく！
- 多次元化では、ざっくりと言って、Split法もUnsplit法も単に1次元の拡張です。
 - ただし、数値的な磁場発散の処理が必要です。これも大変面倒。飯島先生よろしく！



おしまい

お疲れ様でした

がんばってください

