宇宙磁気流体・プラズマシミュレーションサマーセミナー

2019年8月26日 @ 千葉大学

MHDシミュレーションの
多次元化・高次精度化

飯島 陽久（名古屋大学）

参考文献

- 簑島さんSS2015/2016スライド
  - http://www.icehap.chiba-u.jp/activity/SS2015/textbook/ss2015_minoshim.pdf
  - http://www.icehap.chiba-u.jp/activity/SS2016/textbook/ss2016_minoshim_womov.pdf
- 吉川さんSS2017スライド
  - http://www.icehap.chiba-u.jp/activity/SS2017/textbook/ss2017_yoshikawa.pdf
- 三好さんSS2018スライド
  - http://www.icehap.chiba-u.jp/activity/SS2018/textbook/miyoshi_SS2018_FD.pdf

3時限目の目標

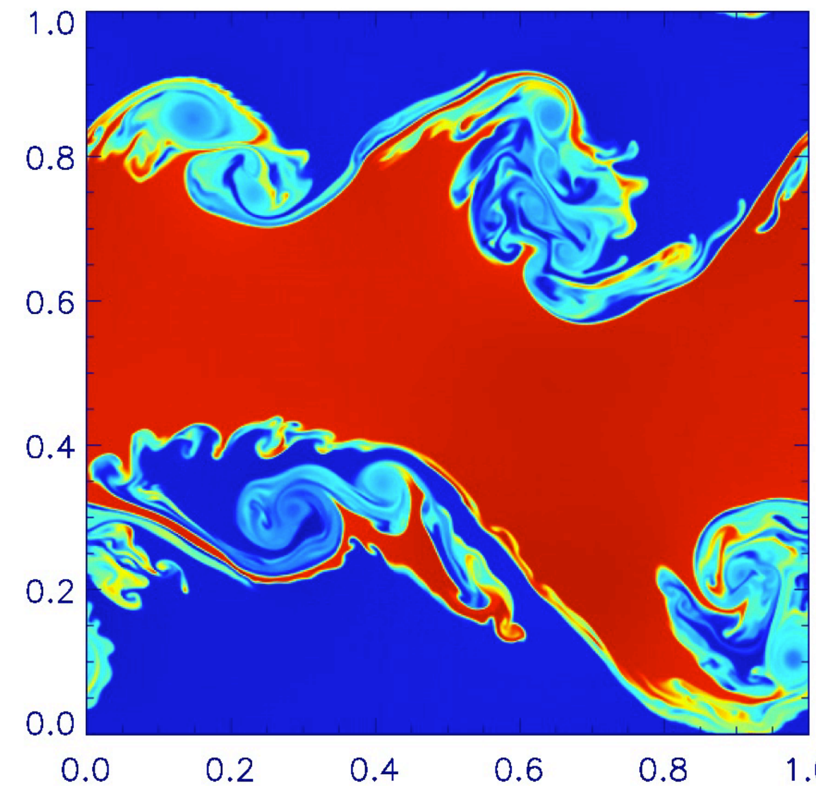
MHD方程式を

多次元・高解像度

で解く。

なぜ高次精度化が必要なのか

- 宇宙プラズマは多くの場合、**レイノルズ数が非常に大きい。**
  数値的な拡散は小さければ小さいほど現実に近い。



- **数値拡散を小さくする方法**
  - 計算格子点数を増やす
    - 大規模計算機の利用、コードの高速化（明日の講義）
  - **計算スキームを解像度を高める**
- **計算スキームの高次精度化**
  - N次精度スキームのエラー・数値拡散は**O(dx^N)**で小さくなっていく
  - 数値拡散を一桁下げるためには、**1次精度スキーム**では格子点数を1方向につき10倍つぎ込む必要がある。3次元計算なら**計算量は1万倍。5次精度スキーム**なら格子点数を1.6倍、計算量にして**6.5倍**の増加で済む。

目次

- **1次元線形移流方程式の高次精度化**
  - 空間高次精度化
  - 時間高次精度化
- **1次元MHD方程式の高次精度化**
  - 特性変数変換
  - リーマンソルバと解像度
- **多次元MHD方程式の解法**
  - 多次元化の方法
  - 磁場発散の処理

1次元線形移流方程式の高次精度化

差分近似に伴う誤差の性質

$$U_j(t) = \exp\left[i\left(kx_j - \omega t\right)\right]$$ 単色波を仮定

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} = ikU_j$$ 解析的な微分

$$\frac{\delta U_j}{\delta x} \equiv ik^* U_j$$ 差分近似 (修正波数 k^* の定義)

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = -a\frac{\delta U_j}{\delta x} = -iak^* U_j$$

$$\omega = ak^* = a(k^*/k) \cdot k$$

k^* が実部を持つ → 解の移流速度が $\mathrm{Re}(k^*/k)$ だけ変化

k^* が虚部を持つ → 増幅率 $\mathrm{Im}(ak^*)$ で解の振幅が変化

1次精度風上差分の性質

単色波を仮定 (線形スキームならOK)

$$U_j = \exp(ikx_j) = \exp(ik\Delta x j)$$

$$\frac{\delta_1 U_j}{\delta_1 x} = \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}$$

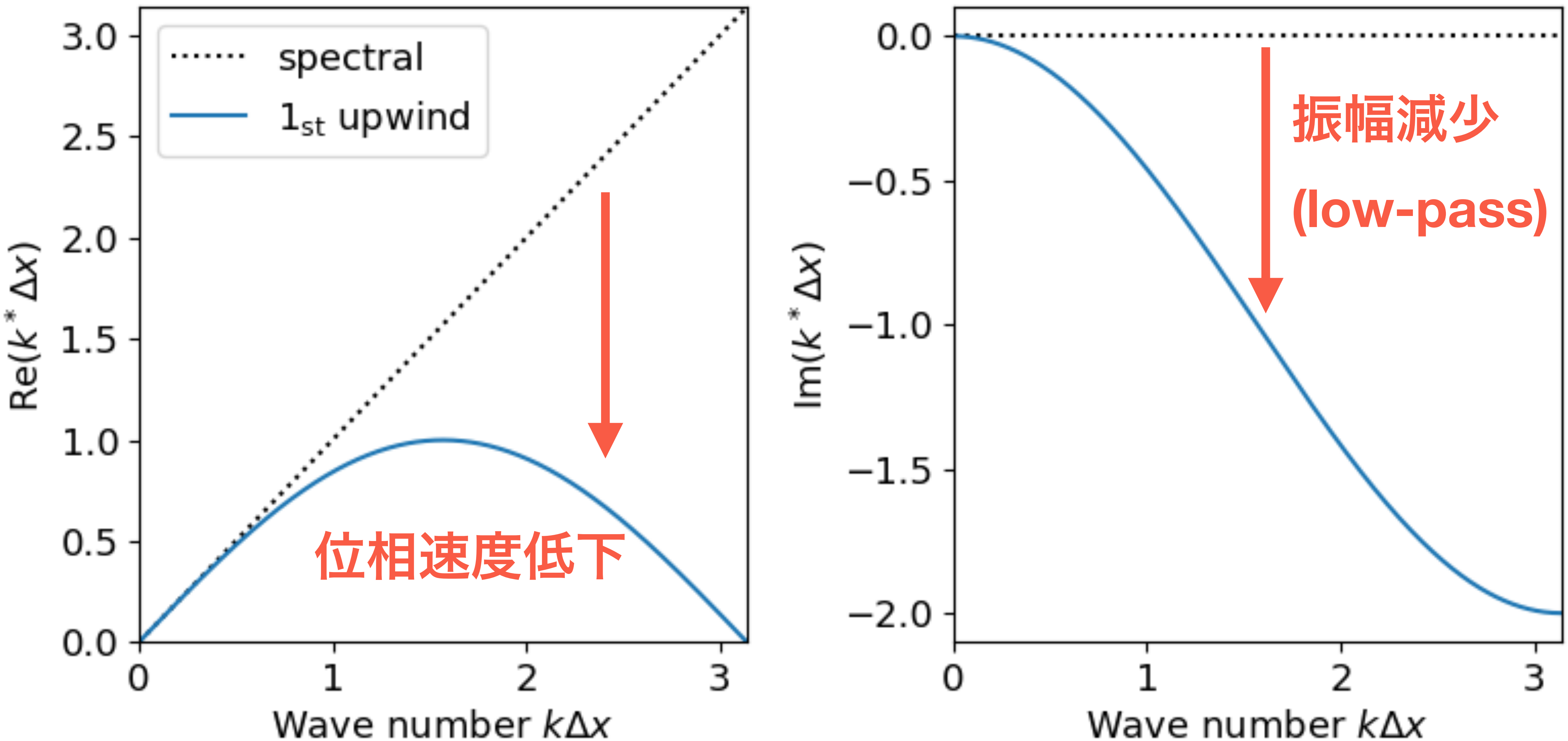
$$= \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{1}{ikU_j}\frac{\delta_1 U_j}{\delta_1 x} = \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} + i\frac{\cos(k\Delta x) - 1}{k\Delta x} = \frac{k^*}{k}$$

実数部 位相速度に影響

虚数部 振幅に影響

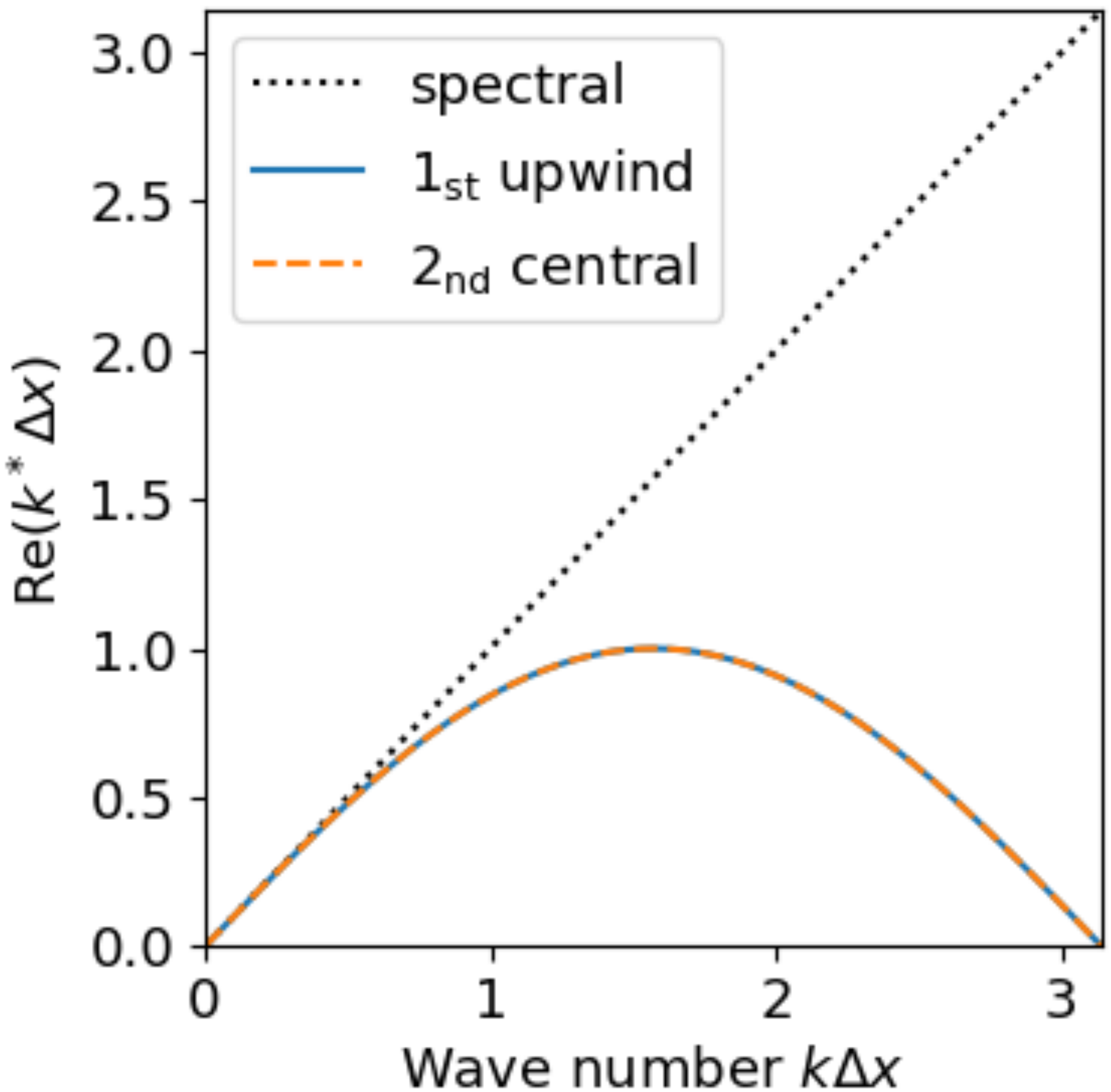
位相誤差と振幅誤差 | 1次精度風上差分



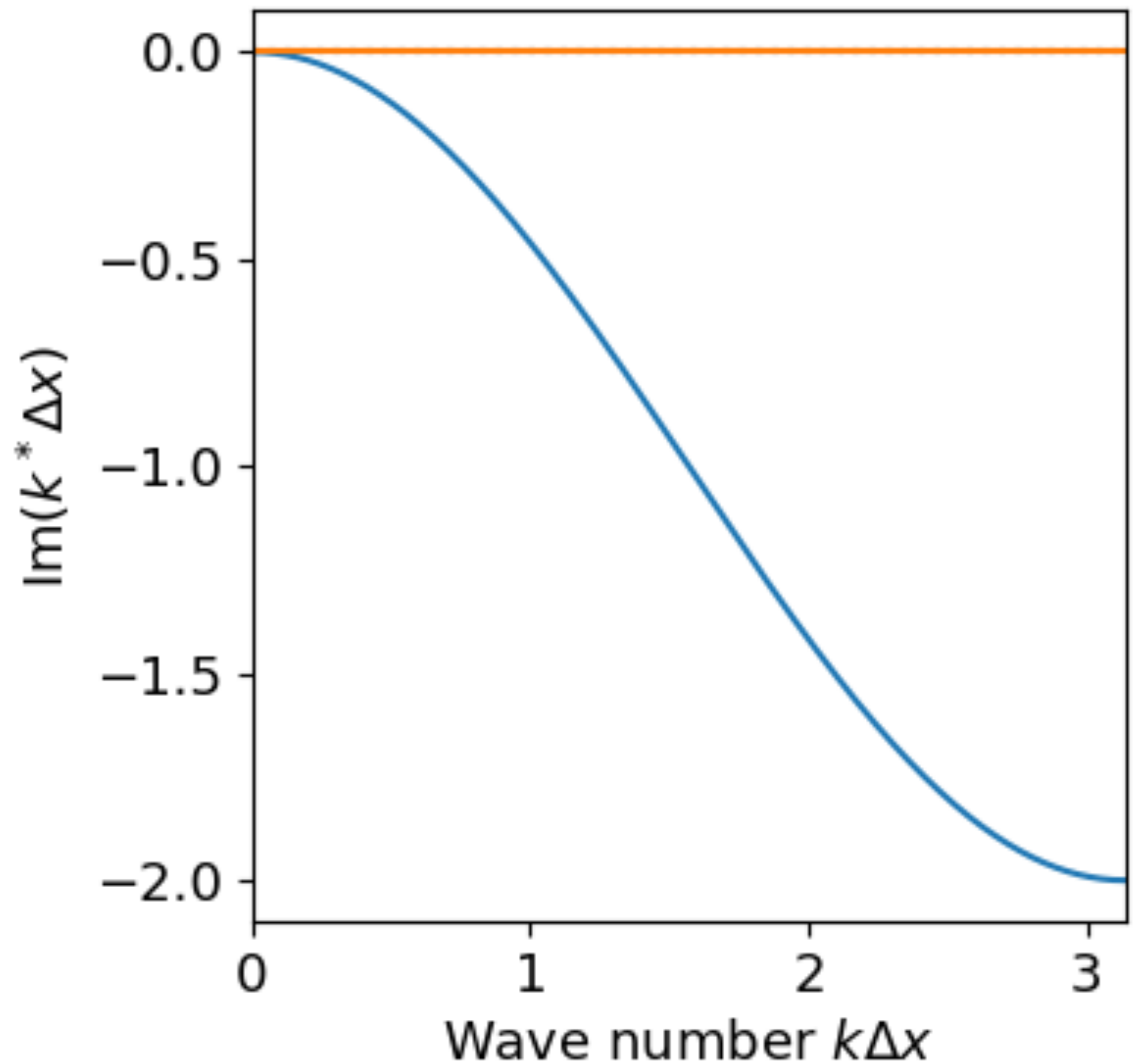
位相誤差　　　　振幅誤差

実際にMHD計算に現れる誤差は両者が混合したもの

風上差分と中央差分の違い = 振幅誤差



1次精度風上差分の位相誤差
= 2次精度中央差分の位相誤差



2次精度中央差分は
振幅誤差を持たない

風上差分と中央差分の関係

$$\frac{\delta_1 U_j}{\delta_1 x} = \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x} \boxed{- \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{2\Delta x}}$$: 1次精度風上

$$\sim -\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\frac{\delta_3 U_j}{\delta_3 x} = \frac{2U_{j+1} + 3U_j - 6U_{j-1} + U_{j-2}}{6\Delta x}$$: 3次

$$= \frac{-U_{j+2} + 8U_{j+1} - 8U_{j-1} + U_{j-2}}{12\Delta x}$$

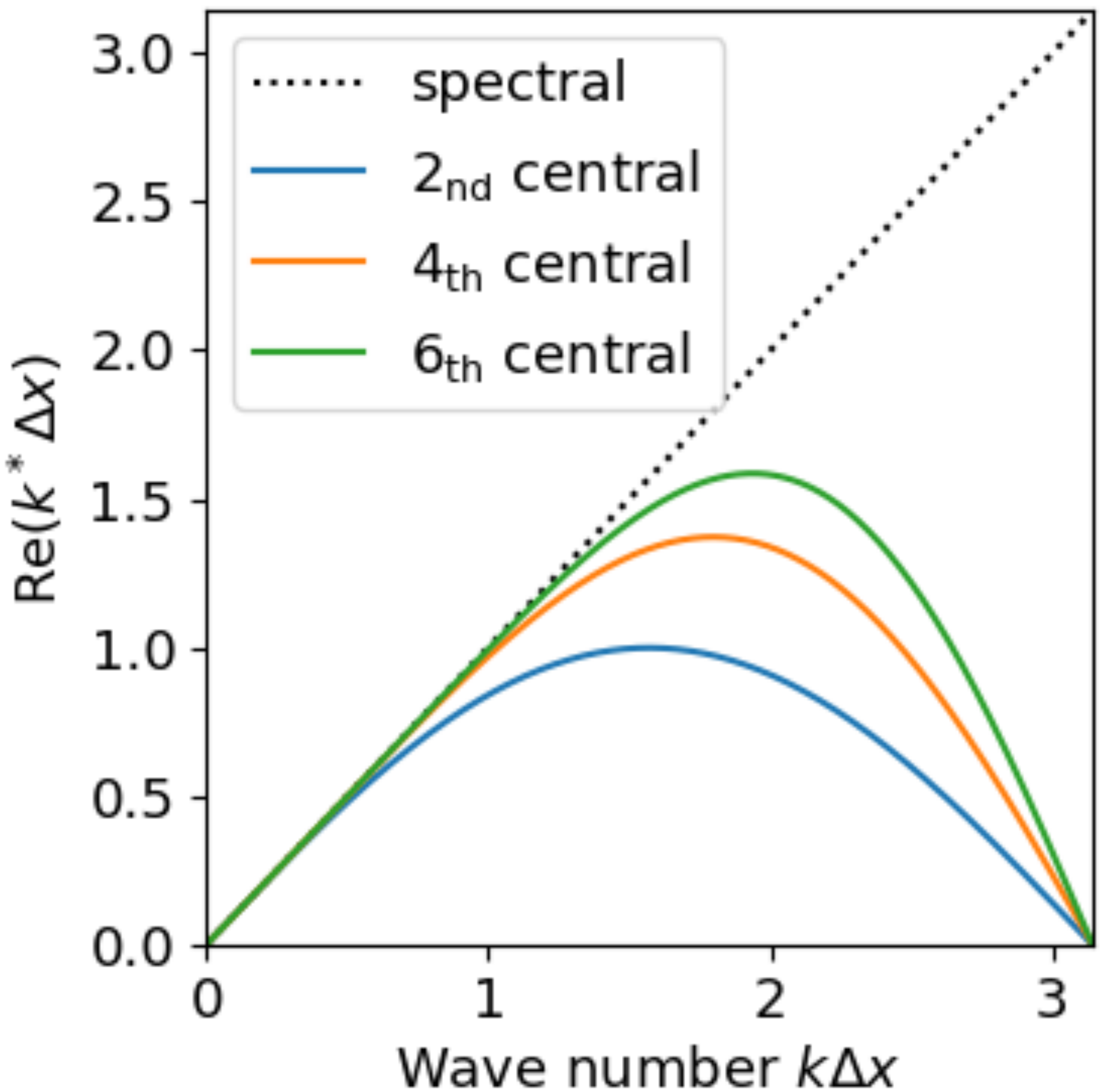
$$\boxed{+ \frac{U_{j+2} - 4U_{j+1} + 6U_j - 4U_{j-1} + U_{j-2}}{12\Delta x}} \sim \frac{\Delta x^3}{12}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$$

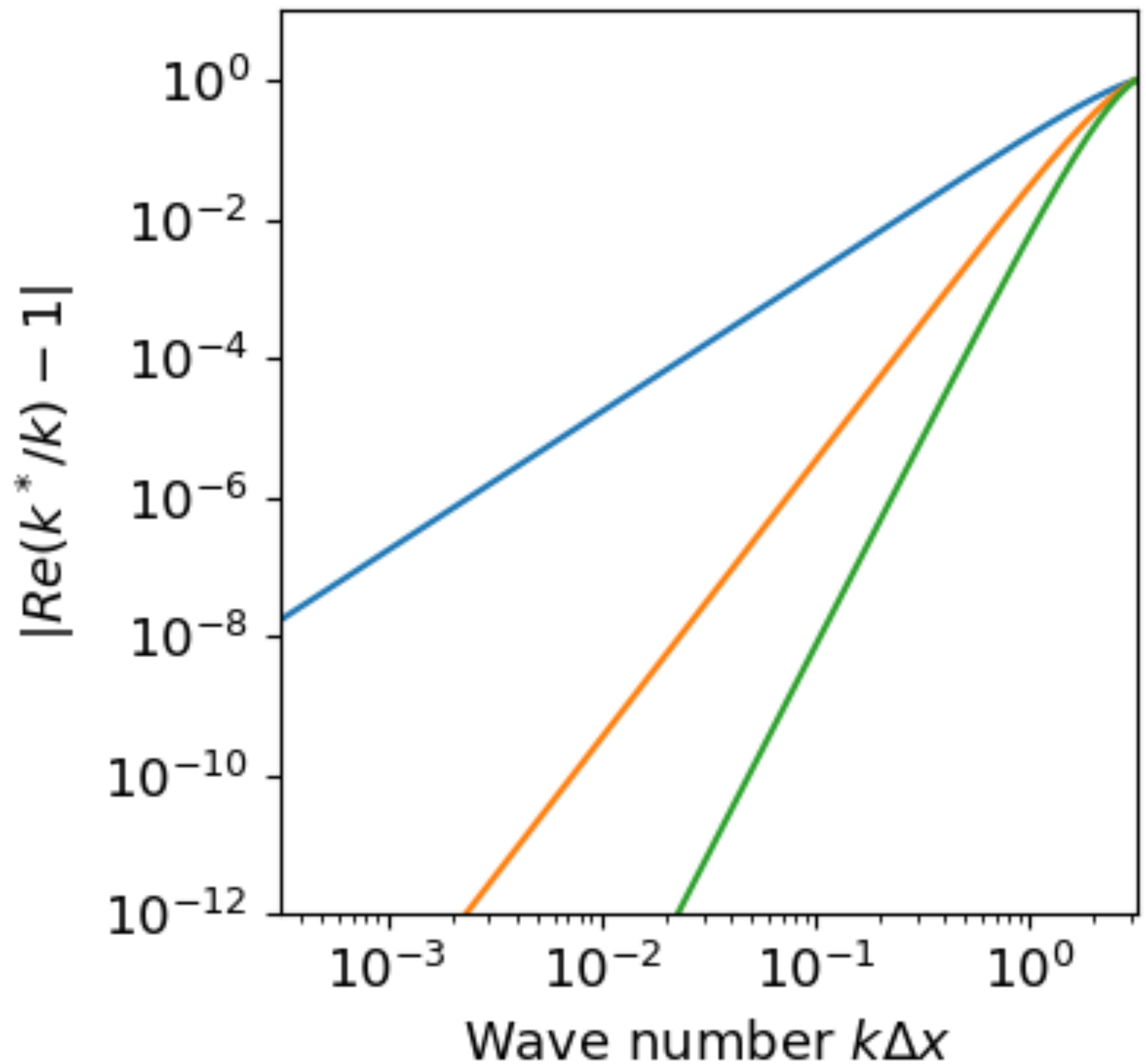
$$\frac{\delta_5 U_j}{\delta_5 x} = \frac{-3U_{j+2} + 30U_{j+1} + 20U_j - 60U_{j-1} + 15U_{j-2} - 2U_{j-3}}{60\Delta x}$$: 5次

$$= \frac{U_{j+3} - 9U_{j+2} + 45U_{j+1} - 45U_{j-1} + 9U_{j-2} - U_{j-3}}{60\Delta x} \sim -\frac{\Delta x^5}{60}\frac{\partial^6 U}{\partial x^6}$$

$$\boxed{- \frac{U_{j+3} - 6U_{j+2} + 15U_{j+1} - 20U_j + 15U_{j-1} - 6U_{j-2} + U_{j-3}}{60\Delta x}}$$

中央差分の高次精度化と収束性 (実部)





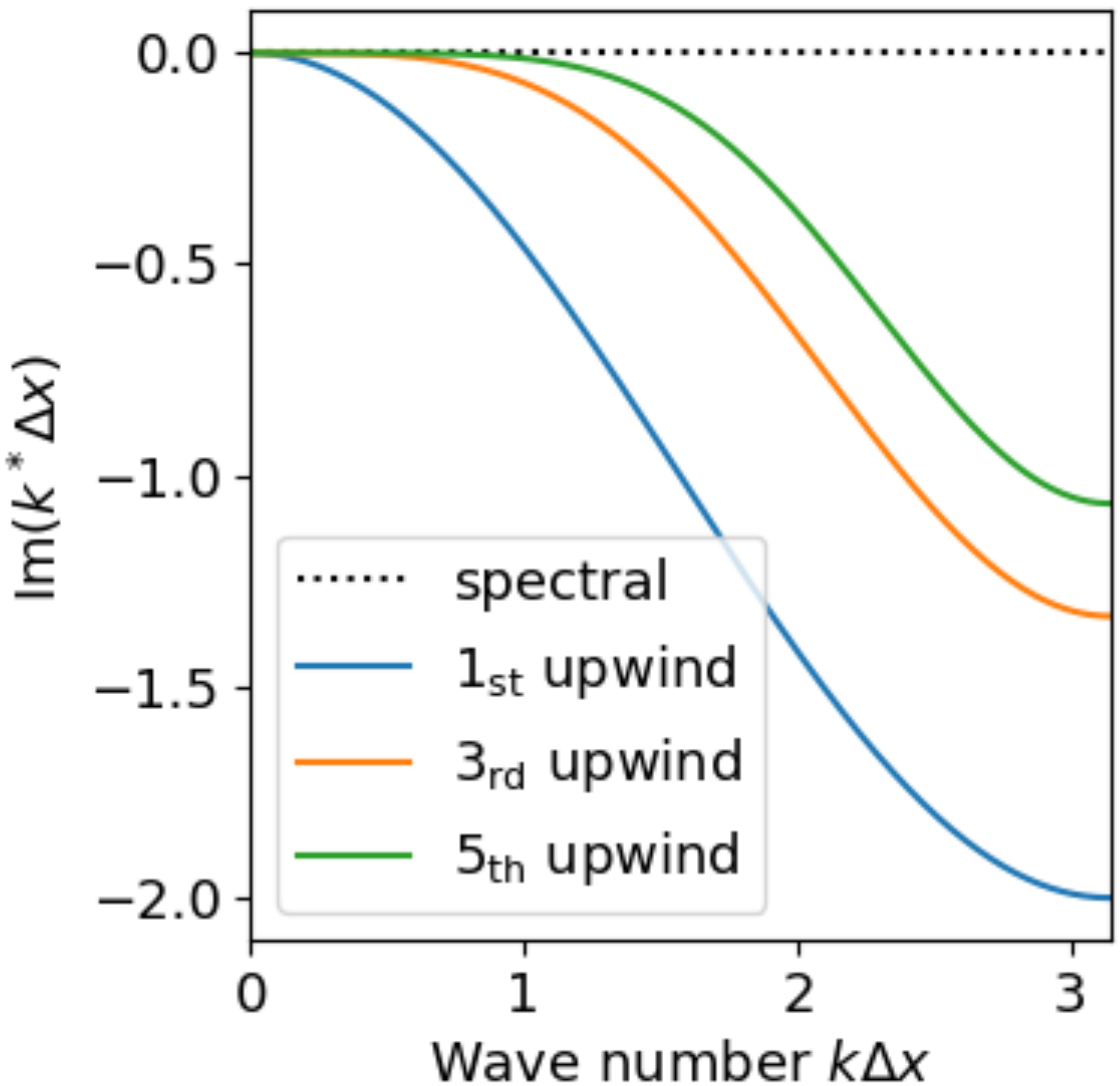
高次精度ほど

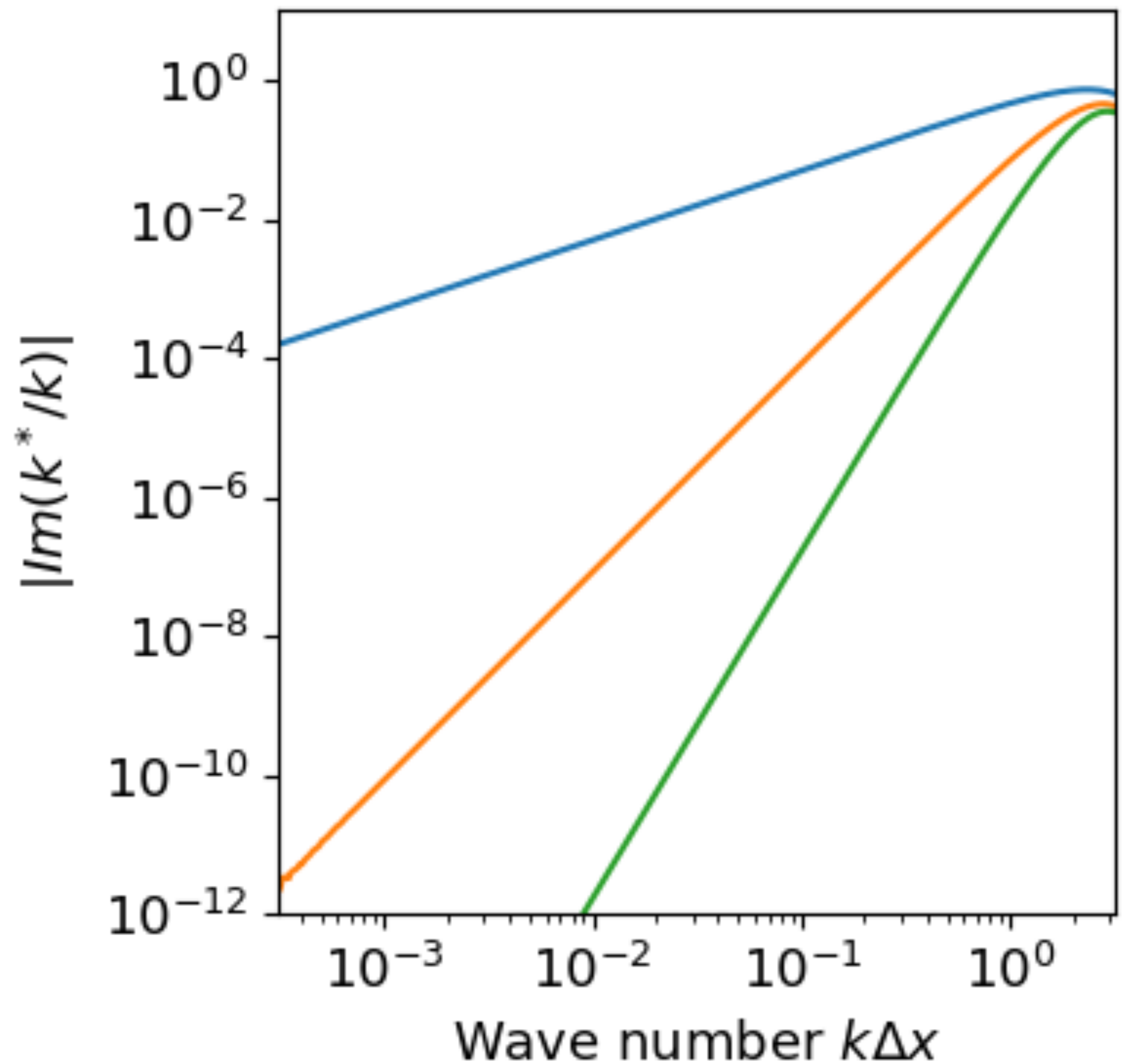
短波長まで正確(な場合が多い)

高次精度ほど

長波長で高次収束

風上差分の高次精度化と収束性 (虚部)





高次精度ほど

短波長までダンプしない

位相誤差の収束性より

振幅誤差の収束性の方が悪い

線形移流方程式の1次精度風上解法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \;\; F = aU, \;\; a = \mathrm{const.}$$

セル i 内で
空間積分

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{\Delta x} = 0$$

$$\begin{aligned} F_{j+1/2} &= \mathrm{Riemann}\left(U_j, U_{j+1}\right) \\ &= \begin{cases} aU_j & \text{if } a > 0 \\ aU_{j+1} & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \frac{a}{2}\left(U_{j+1} + U_j\right) - \frac{|a|}{2}\left(U_{j+1} - U_j\right) \end{aligned}$$

高次精度線形補間

$$\frac{\partial U_j}{\partial t}+\frac{F_{j+1/2}-F_{j-1/2}}{\Delta x}=0$$ **: 有限体積法**

$$\begin{aligned}F_{j+1/2}&=\mathrm{Riemann}\left(U_L,U_R\right)\\&=\frac{a}{2}\left(U_R+U_L\right)-\frac{|a|}{2}\left(U_R-U_L\right)\end{aligned}$$

$$U^L_{j+1/2}=\begin{cases}U_j & \textbf{1次精度}\\ \left(-U_{j-1}+4U_j+U_{j+1}\right)/4 & \textbf{2次精度}\\ \left(-U_{j-1}+5U_j+2U_{j+1}\right)/6 & \textbf{3次精度}\\ \left(2U_{j-2}-13U_{j-1}+47U_j+27U_{j+1}-3U_{j+2}\right)/60 & \\ \ldots & \textbf{5次精度}\end{cases}$$

$U^R_{j-1/2}$は$U^L_{j+1/2}$で…, j-2, j-1, j, j+1, j+2, …を逆順にしたもの。

高次精度線形補間の導出

セル平均値（既知量）

$$U_j = \frac{1}{\Delta x}\int_{I_j} U_j(x - x_j)dx, \qquad I_j = \left[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\right]$$

$$U_{j\pm1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j\pm1}} U_j(x - x_j)dx, \ \ldots$$

テイラー展開に基づくセルj内の空間分布

テイラー展開の微分係数を計算

$$U_j(x - x_j) = U(x_j) + U_x(x_j)(x - x_j) + U_{xx}(x_j)(x - x_j)^2/2 + \ldots$$

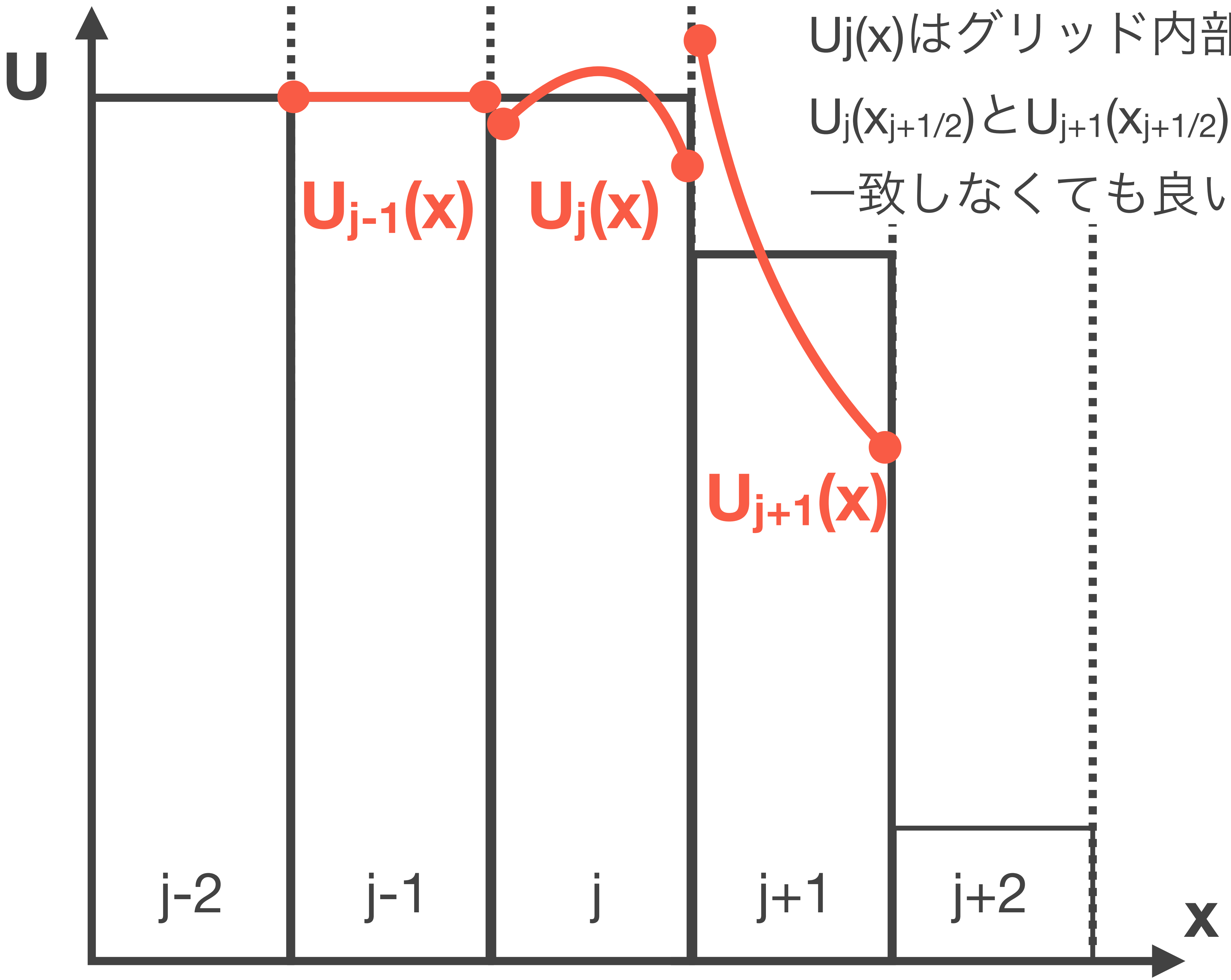
必要な精度で打ち切り

セル境界における風上補間値

$$U^L_{j+1/2} = U(x_j) + U_x(x_j)\frac{\Delta x_j}{2} + U_{xx}(x_j)\frac{\Delta x_j^2}{8} + \ldots$$

$$U^R_{j-1/2} = U(x_j) - U_x(x_j)\frac{\Delta x_j}{2} + U_{xx}(x_j)\frac{\Delta x_j^2}{8} + \ldots$$

高次精度線形補間の導出



$U_j(x)$はグリッド内部で連続。

$U_j(x_{j+1/2})$と$U_{j+1}(x_{j+1/2})$は一致しなくても良い。

高次精度線形補間の導出

セル平均値（既知量）

$$U_j = \frac{1}{\Delta x}\int_{I_j} U_j(x - x_j)dx, \qquad I_j = \left[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\right]$$

$$U_{j\pm 1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j\pm 1}} U_j(x - x_j)dx, \ \ldots$$

テイラー展開の
微分係数を計算

テイラー展開に基づくセルj内の空間分布

$$\begin{aligned} U_j(x - x_j) =& U(x_j) + U_x(x_j)\left(x - x_j\right) \\ &+ U_{xx}(x_j)\left(x - x_j\right)^2 /2 + \ldots \end{aligned}$$

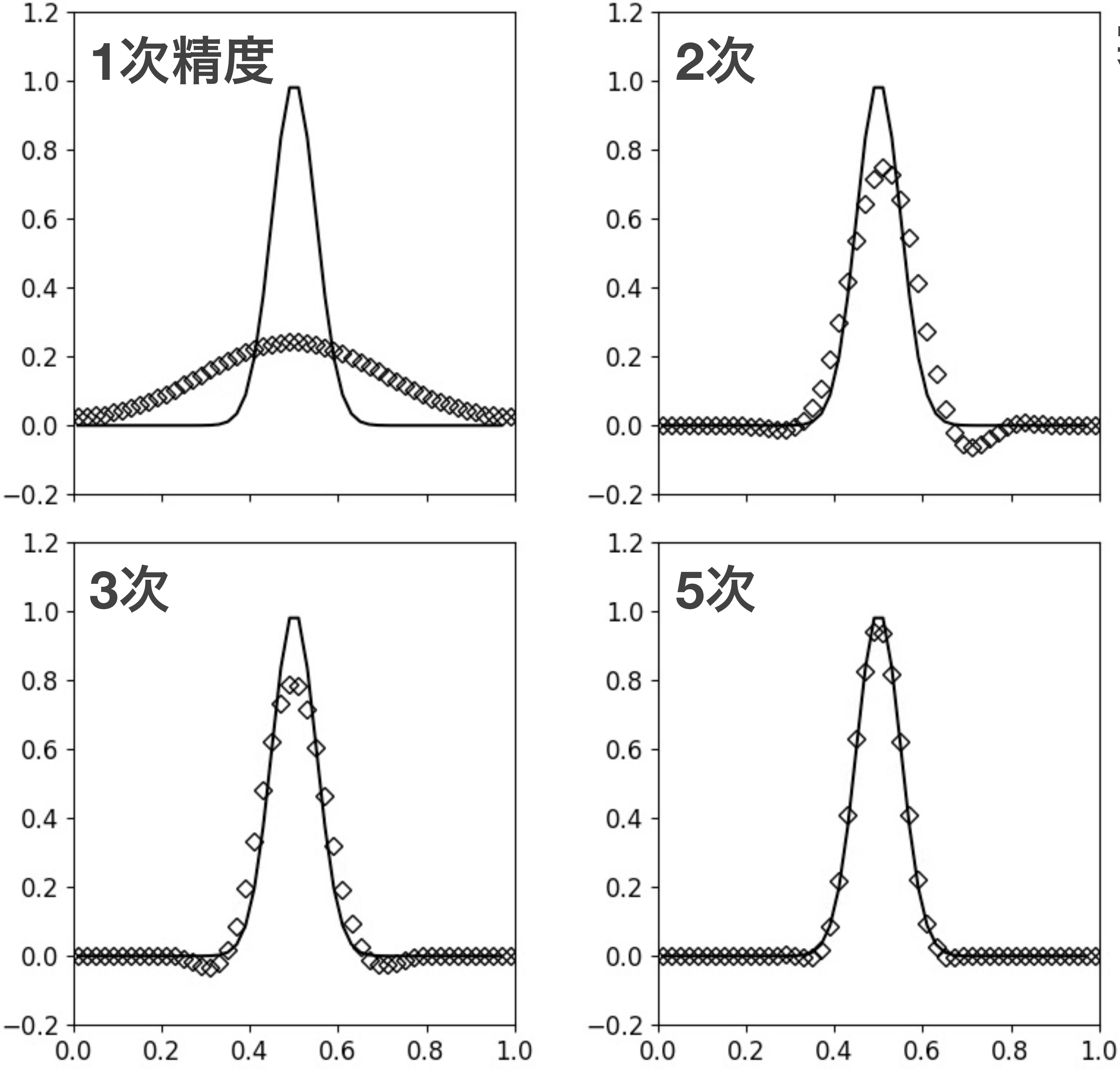
必要な精度で打ち切り

セル境界における風上補間値

$$U^L_{j+1/2} = U(x_j) + U_x(x_j)\frac{\Delta x_j}{2} + U_{xx}(x_j)\frac{\Delta x_j^2}{8} + \ldots$$

$$U^R_{j-1/2} = U(x_j) - U_x(x_j)\frac{\Delta x_j}{2} + U_{xx}(x_j)\frac{\Delta x_j^2}{8} + \ldots$$

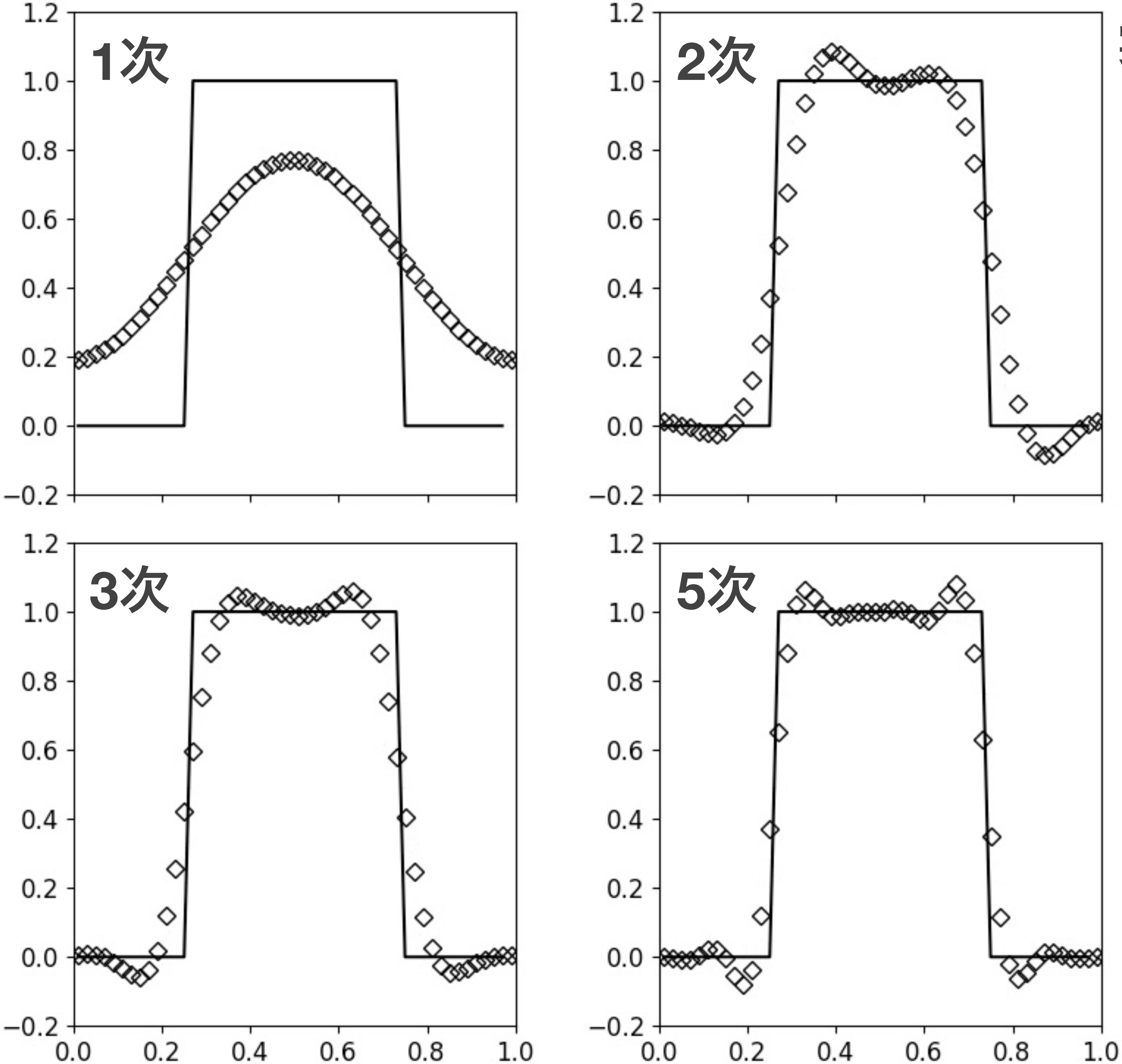
高次精度線形補間の比較 | ガウシアン



実線: 解析解

高次精度になるほどきれいに解析解に近づいていく。

高次精度線形補間の比較 | 矩形波



実線: 解析解

不連続面付近で

数値振動。

Godunovの定理:

2次精度以上の

線形スキームは、

解の単調性を維持

することが出来ない。

非線形スキームが必要。

非線形スキームの例

- 不連続を含むような解をうまく取り回せるスキーム
  - 高次精度 @ なめらかな領域、低次精度 @ 不連続
- Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws (**MUSCL**; van Leer, 1979)
- Weighted Essentially Oscillatory scheme (**WENO**; Liu et al., 1994; Jiang & Shu, 1996)
- Accurate Monotonicity Preserving scheme (**MP**; Suresh & Huynh, 1997)
- その他多数

単調性とTVD

TVDスキーム:

スキームが以下の条件を満たす時、TVDスキームと呼ぶ。

$$TV(u_j^{n+1}) \leq TV(u_j^n),\ TV(u_j) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|$$

単調性保持スキーム:

nステップ目の解 u^n_j が単調な時、

次のn+1ステップ目の解 u^{n+1}_j も単調になるスキーム。

Harten (1983):

TVDスキームは、

単調性保持スキームである。

MUSCL法

セル j 内の物理量の空間分布

$$
\begin{aligned}
U_j(x) =& U_j + \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}(x - x_j) \\
&+ \frac{3\kappa}{2}\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{\Delta x^2}\left[(x - x_j)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right]
\end{aligned}
$$

セル境界の補間値（リミターなし）

$$
U^L_{i+1/2} = U_j(x_{j+1/2}) = U_j + \frac{1-\kappa}{4}(U_j - U_{j-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(U_{j+1} - U_j)
$$

$$
U^R_{j-1/2} = U_j(x_{j-1/2}) = U_j - \frac{1-\kappa}{4}(U_{j+1} - U_j) - \frac{1+\kappa}{4}(U_j - U_{j-1})
$$

セル境界の補間値（TVD条件のため流速制限関数Φを導入）

$$
U^L_{i+1/2} = U_j + \frac{1-\kappa}{4}\Phi(r)(U_j - U_{j-1}) + \frac{1+\kappa}{4}\Phi(1/r)(U_{j+1} - U_j)
$$

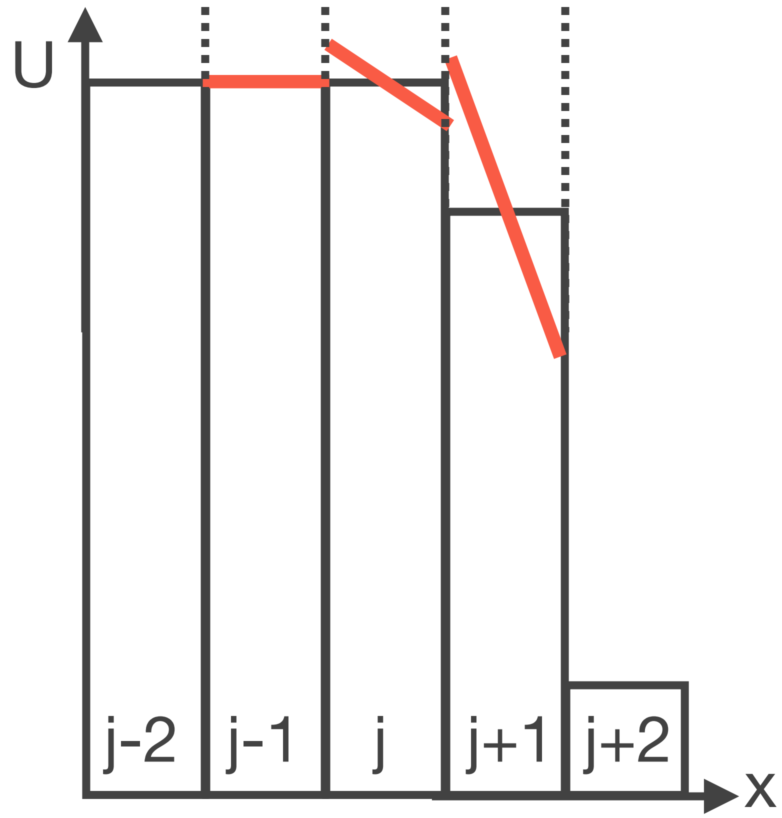
$$
U^R_{j-1/2} = U_j - \frac{1-\kappa}{4}\Phi(1/r)(U_{j+1} - U_j) - \frac{1+\kappa}{4}\Phi(r)(U_j - U_{j-1})
$$

MUSCL法

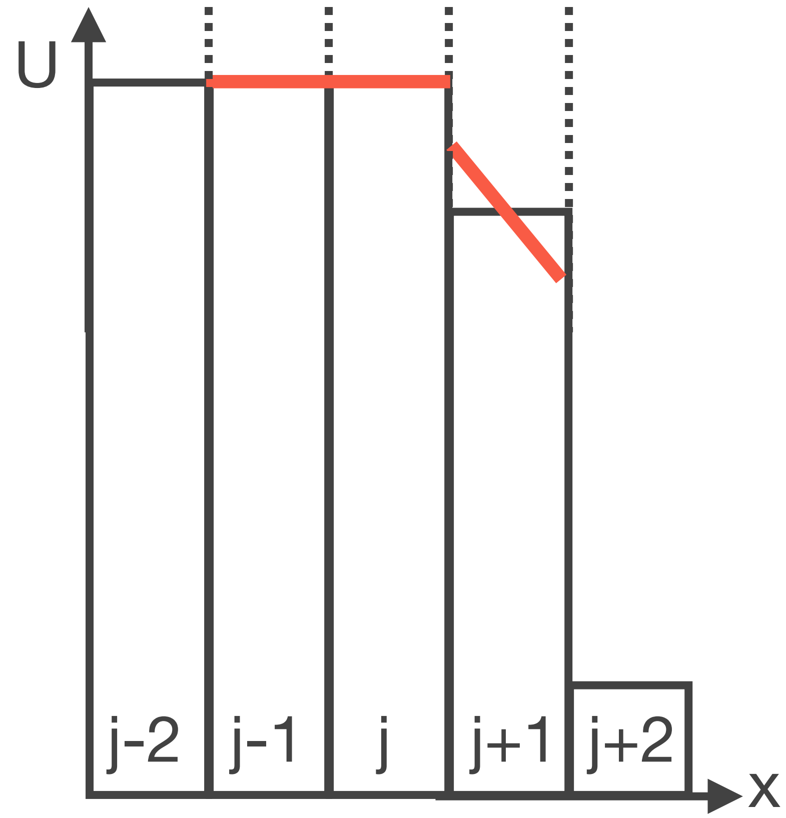
セル境界の補間値（リミターΦが対称な場合; $\Phi(r) = r\Phi(1/r)$**）**

$$U^L_{i+1/2} = U_j + \frac{1}{2}\Delta_j, \ U^R_{j-1/2} = U_j - \frac{1}{2}\Delta_j$$

$$\begin{aligned}\Delta_j &= \mathrm{Limiter}\left(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}\right) \\ &= \Phi(1/r)(U_{j+1} - U_j) = \Phi(r)(U_j - U_{j-1})\end{aligned}$$



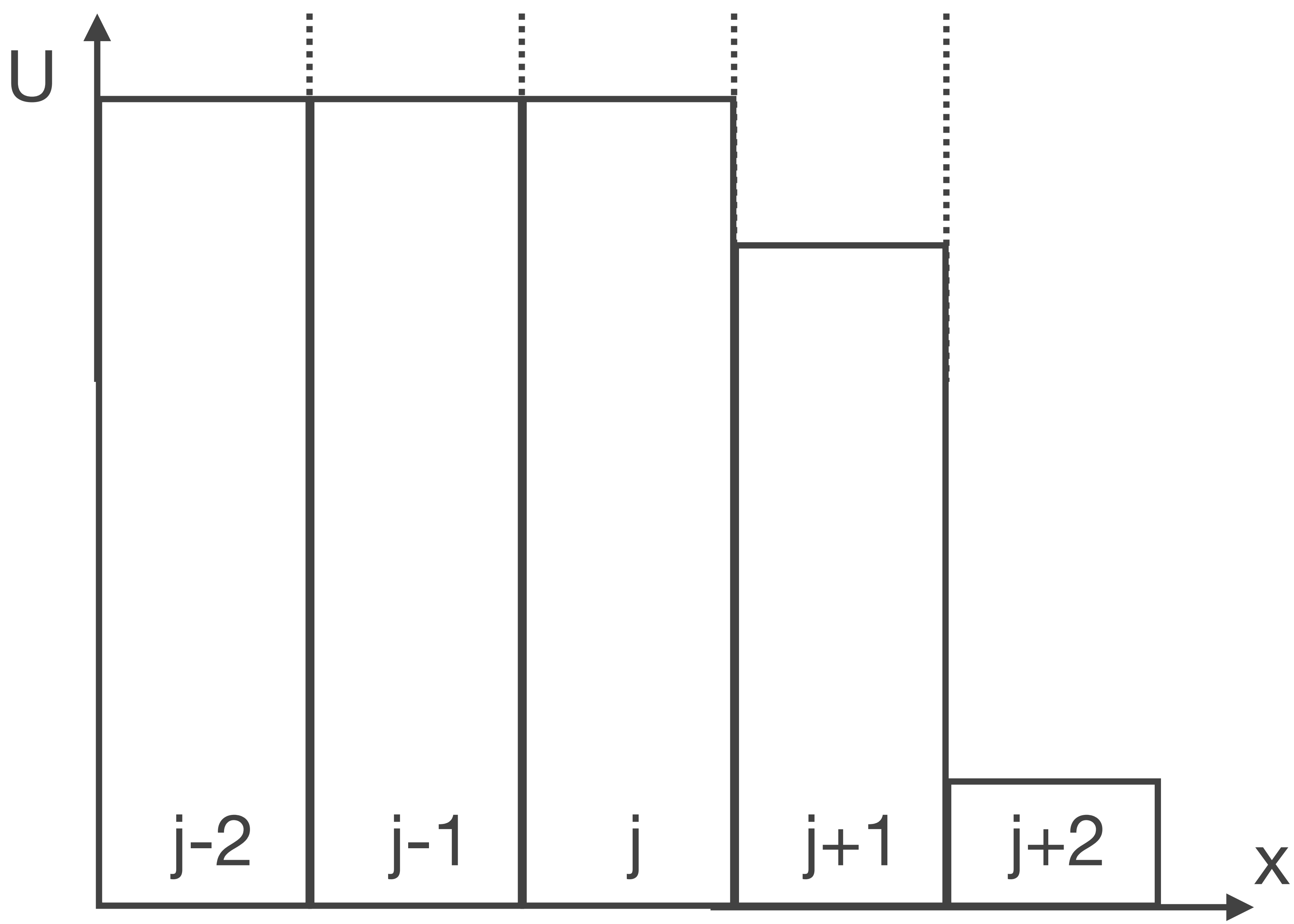
リミター無し（線形補間）



リミター有り（minmod）

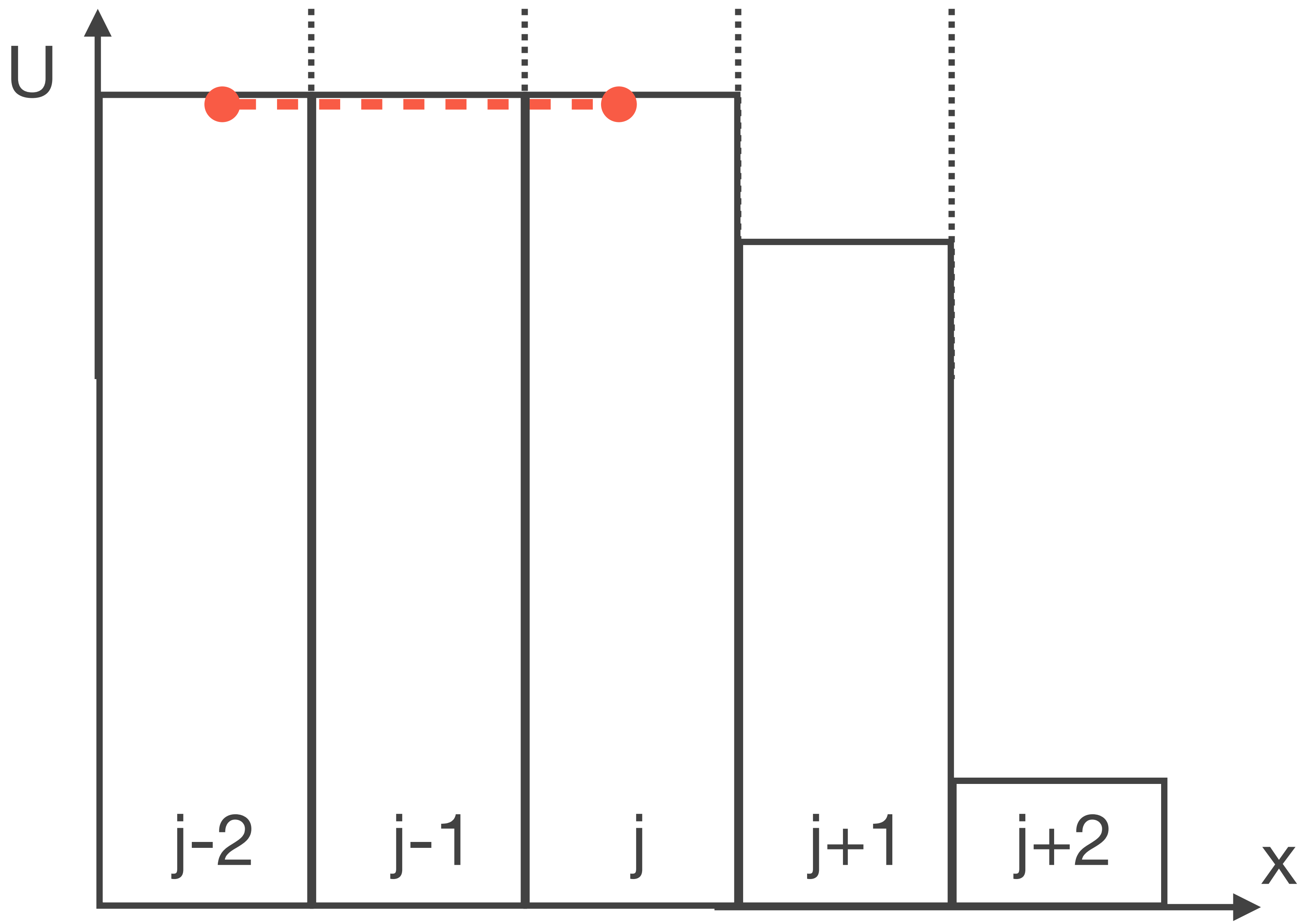
MUSCL法 | セル内の物理量分布（リミター無し）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j\,(x - x_j)\,,\ \ \Delta_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}$$



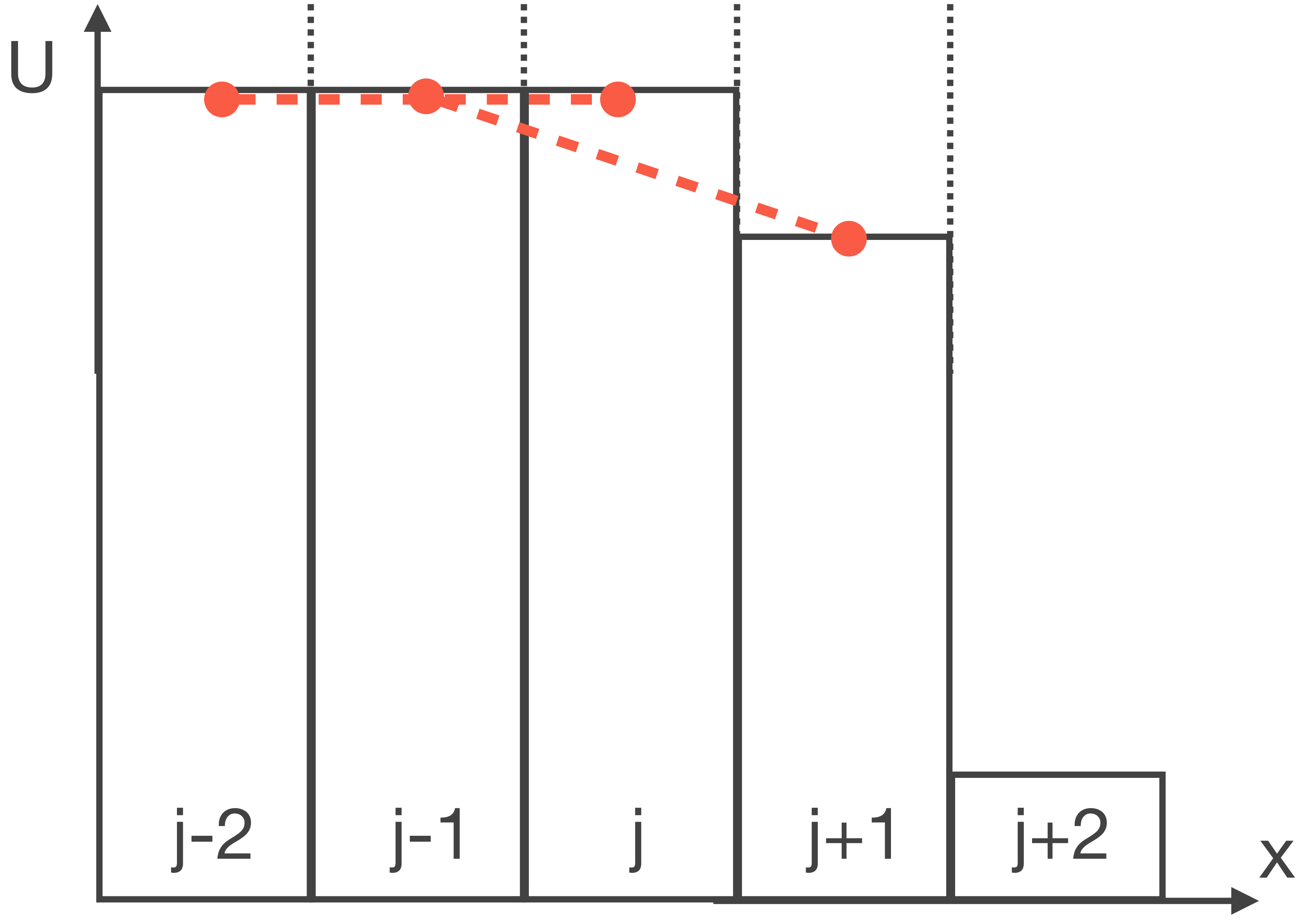
MUSCL法 | セル内の物理量分布（リミター無し）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j (x - x_j), \quad \boxed{\Delta_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}}$$



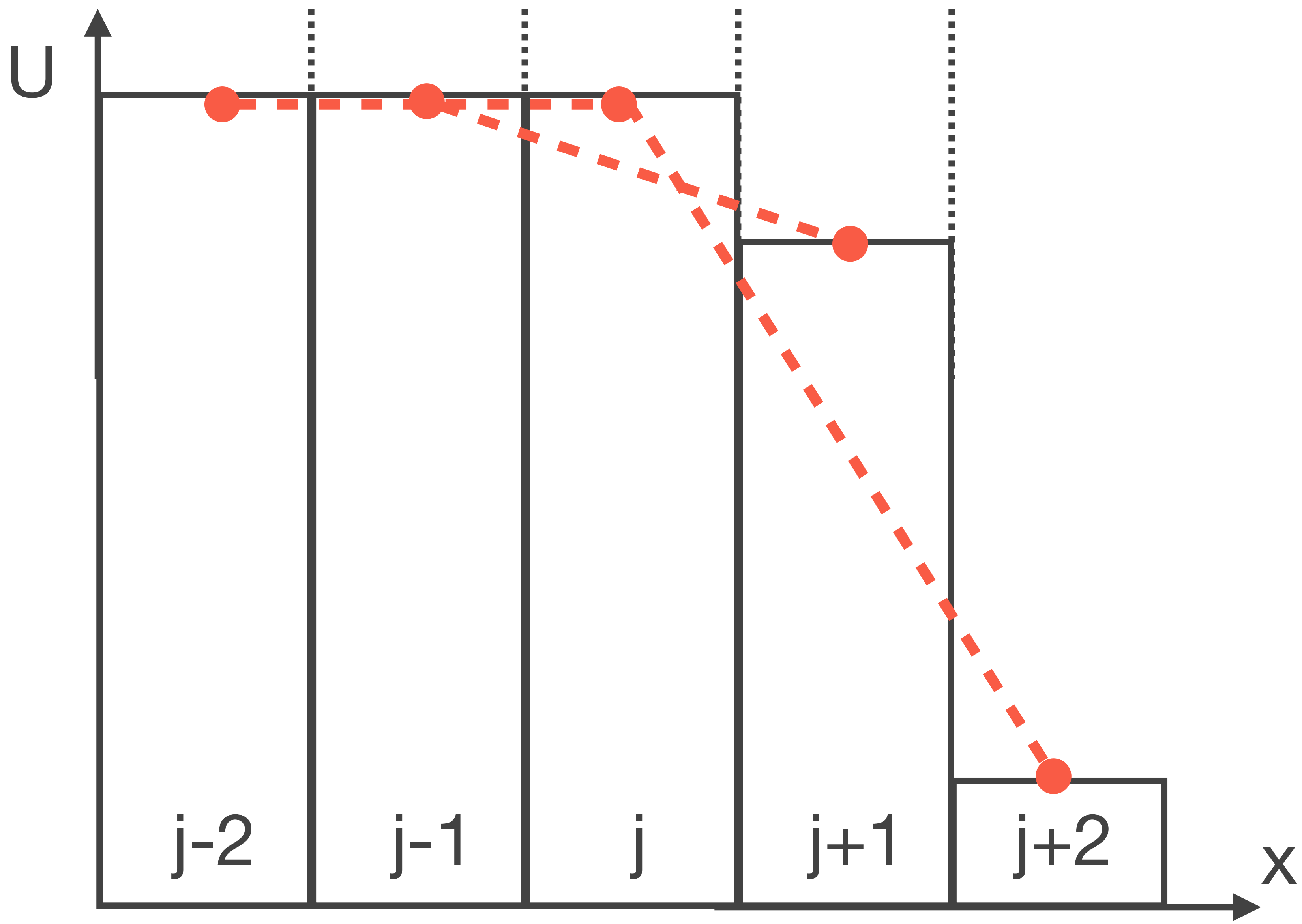
MUSCL法 | セル内の物理量分布（リミター無し）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j \left(x - x_j\right), \quad \boxed{\Delta_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}}$$



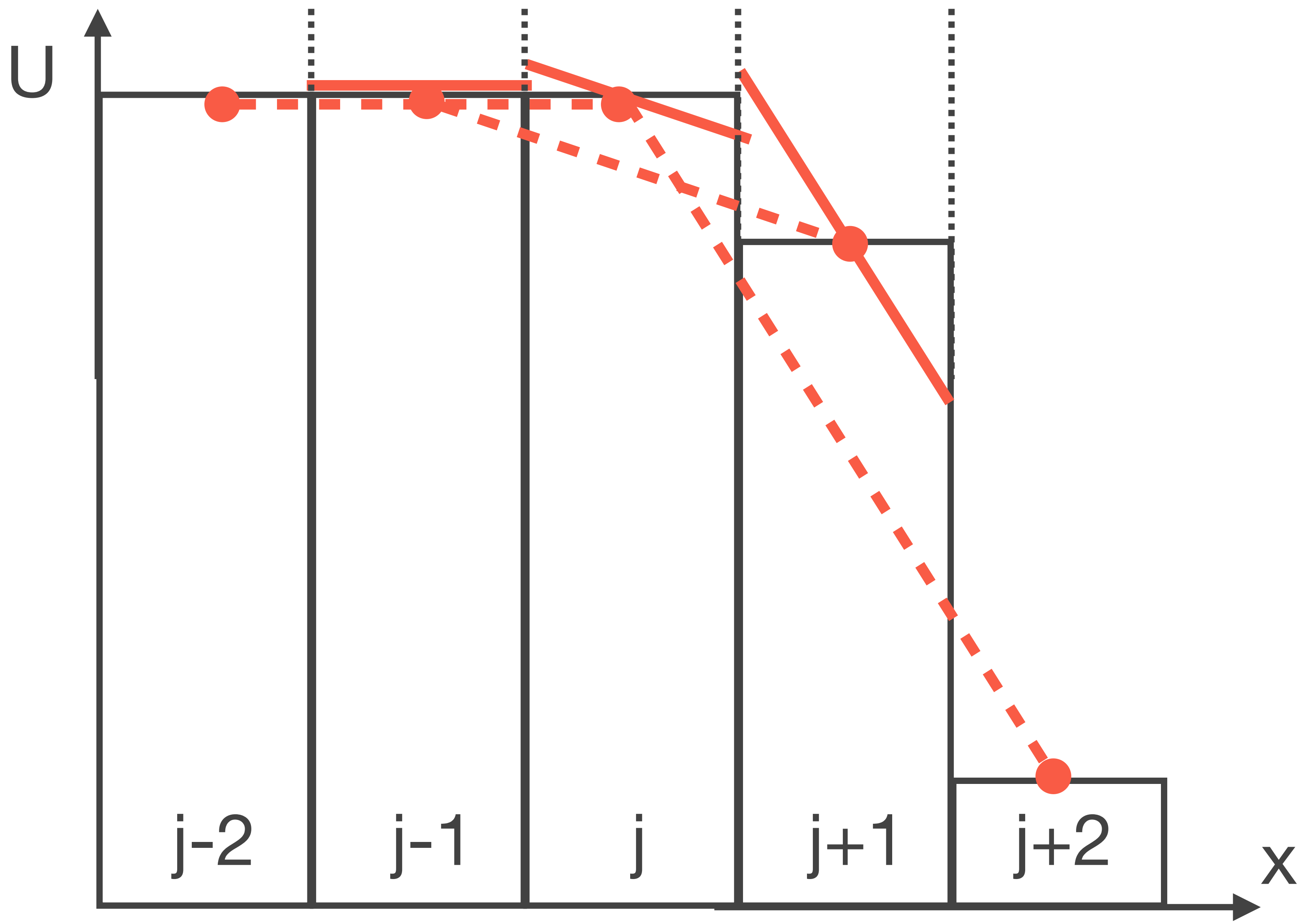
MUSCL法 | セル内の物理量分布（リミター無し）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j\,(x - x_j)\,,\ \boxed{\Delta_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}}$$



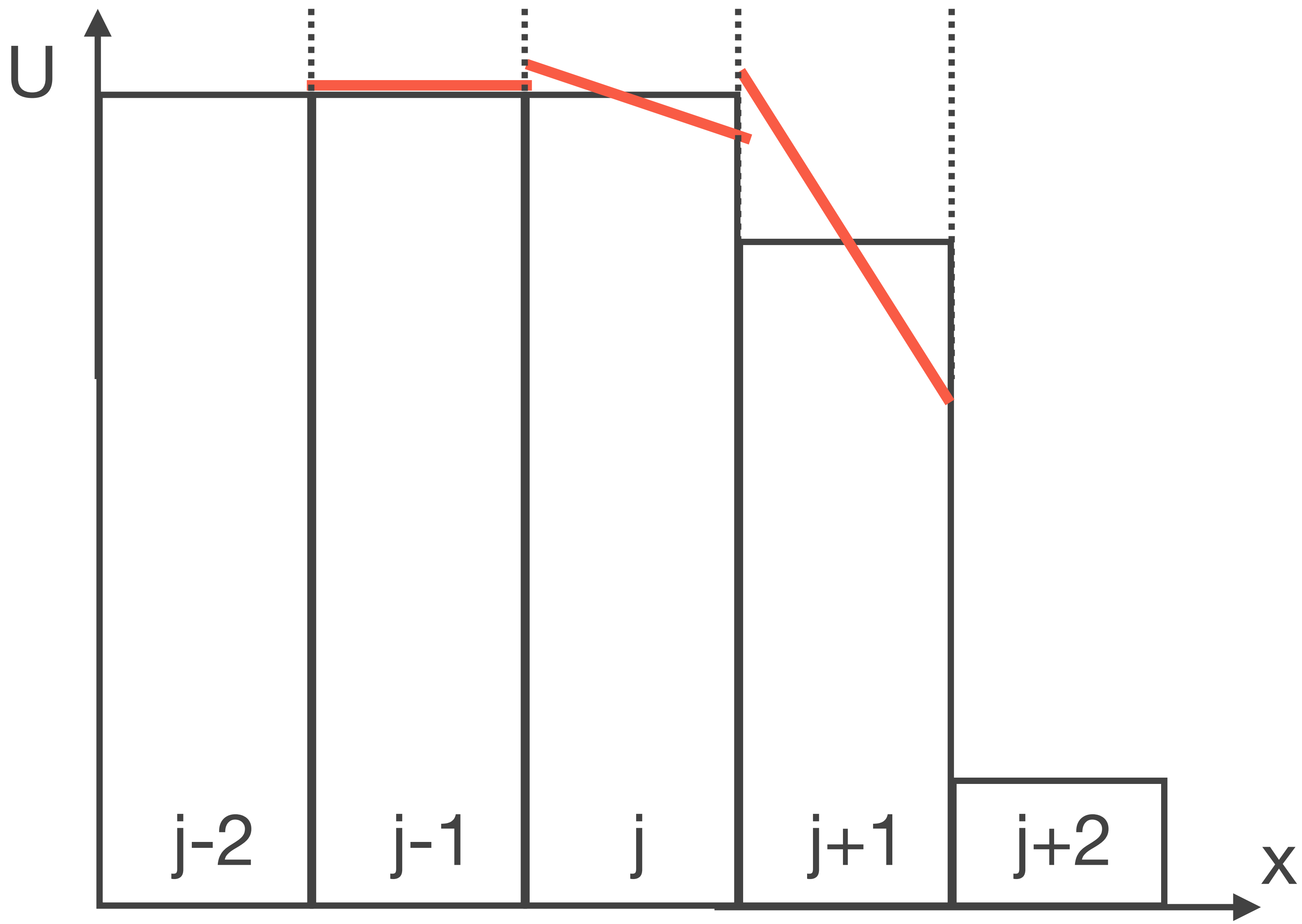
MUSCL法 | セル内の物理量分布（リミター無し）

$$\boxed{U_j(x) = U_j + \Delta_j \left(x - x_j\right)}, \quad \Delta_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}$$



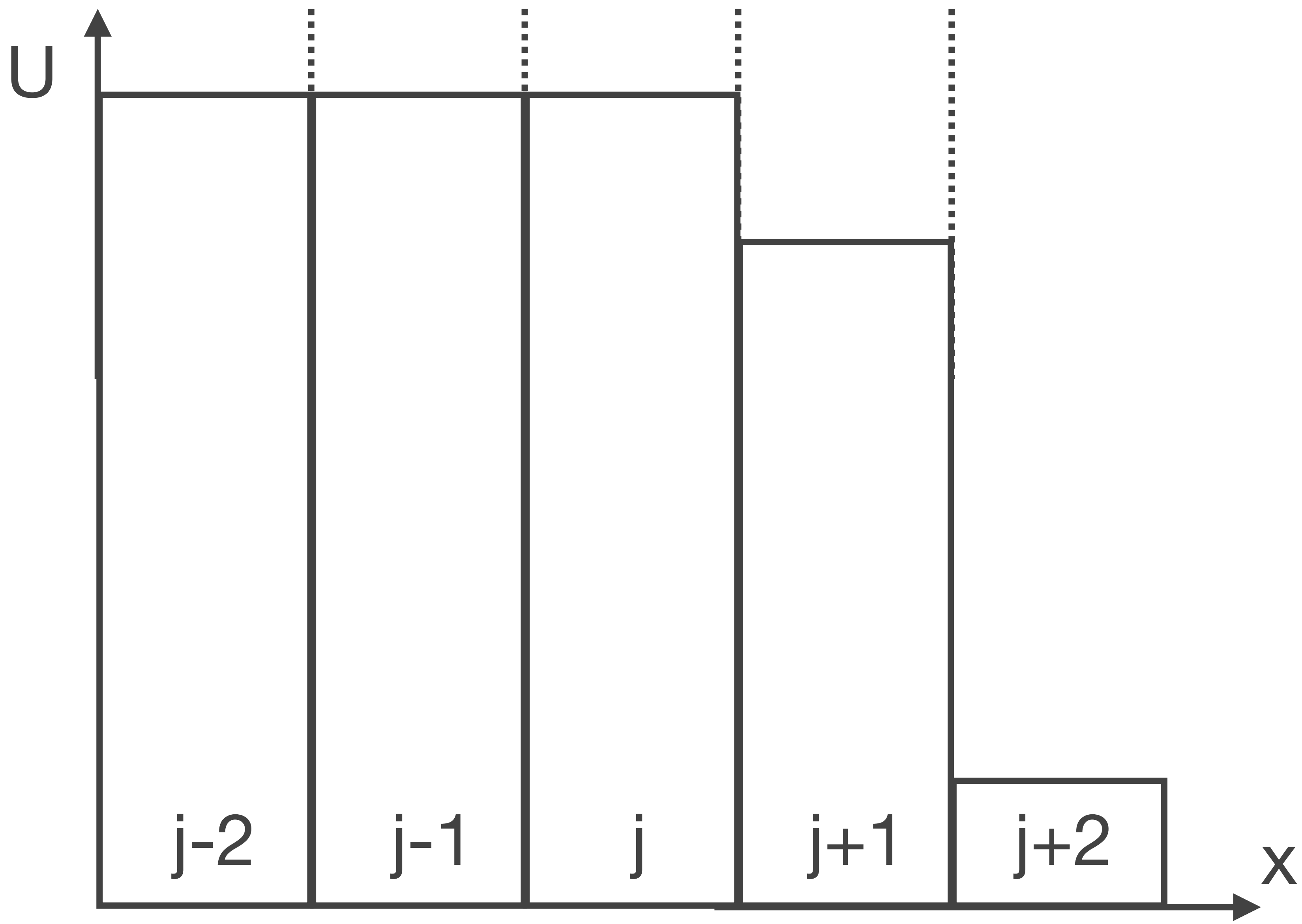
MUSCL法 | セル内の物理量分布（リミター無し）

$$\boxed{U_j(x) = U_j + \Delta_j\left(x - x_j\right)}, \quad \Delta_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}$$



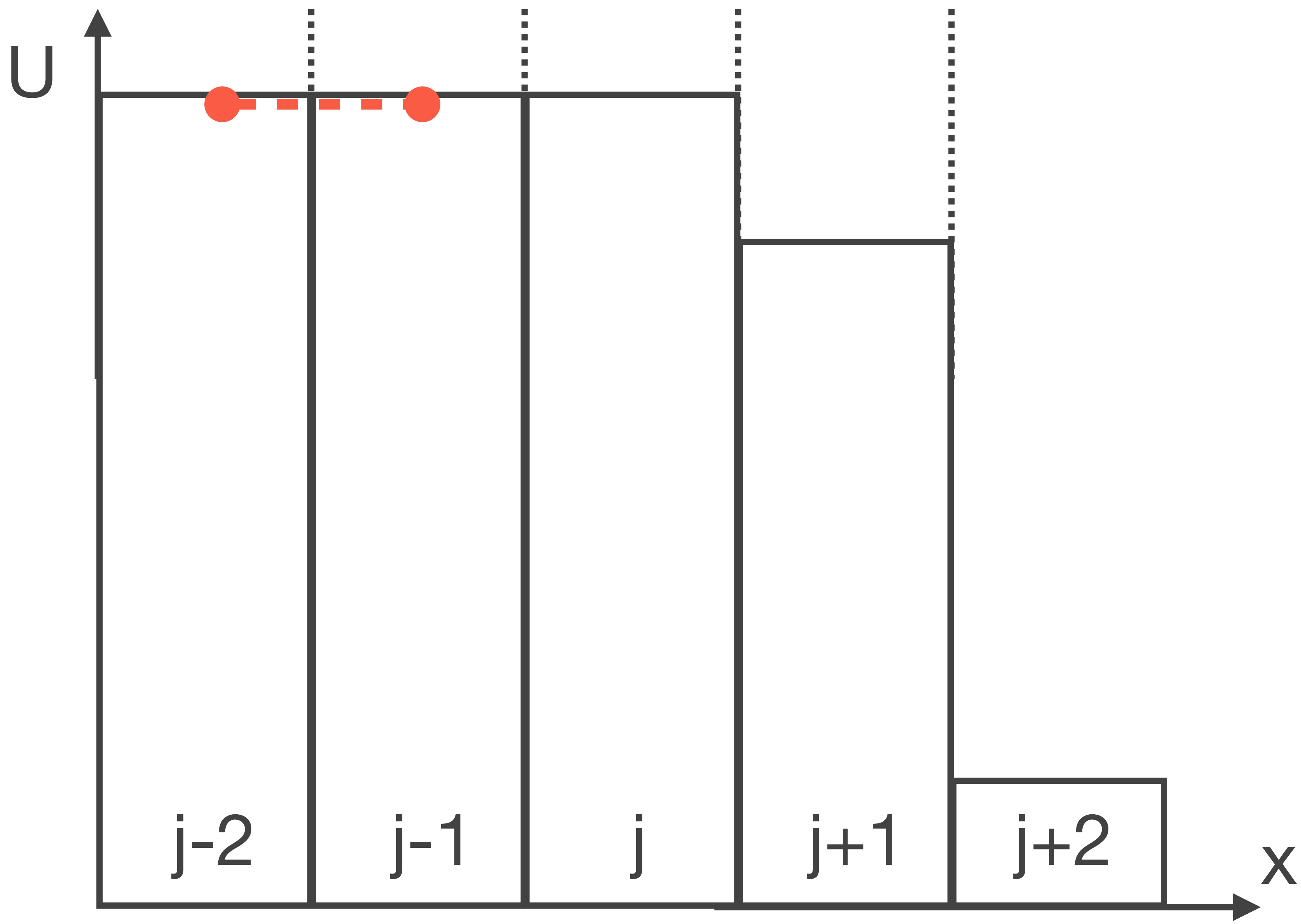
MUSCL法 | セル内の物理量分布（minmodリミター）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j\,(x - x_j)\,,\;\; \Delta_j = \mathrm{minmod}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x}, \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}\right)$$



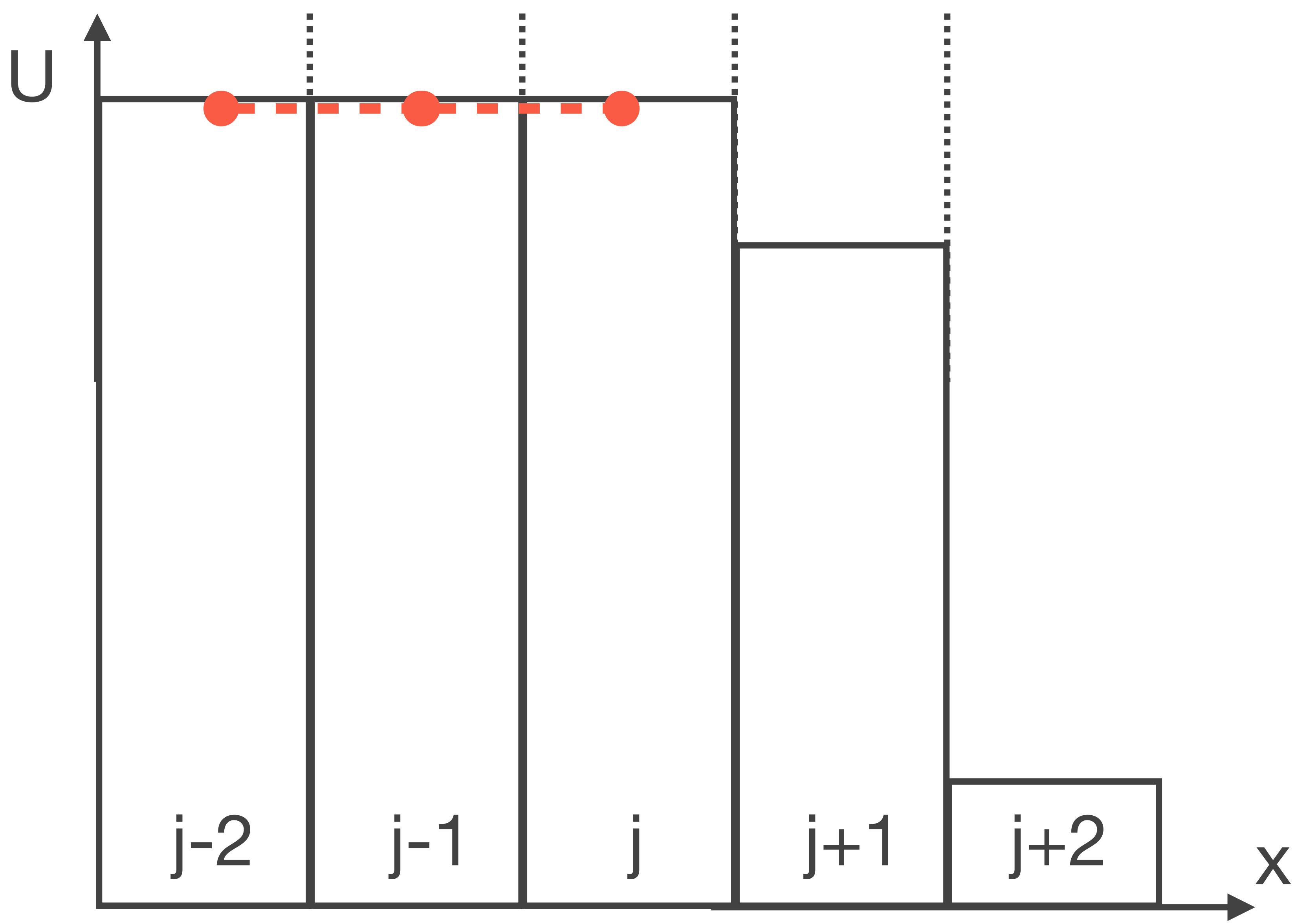
MUSCL法 | セル内の物理量分布（minmodリミター）

$$U_j(x) = U_j + \varDelta_j\,(x - x_j)\,,\ \boxed{\varDelta_j = \mathrm{minmod}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\varDelta x}, \frac{U_j - U_{j-1}}{\varDelta x}\right)}$$



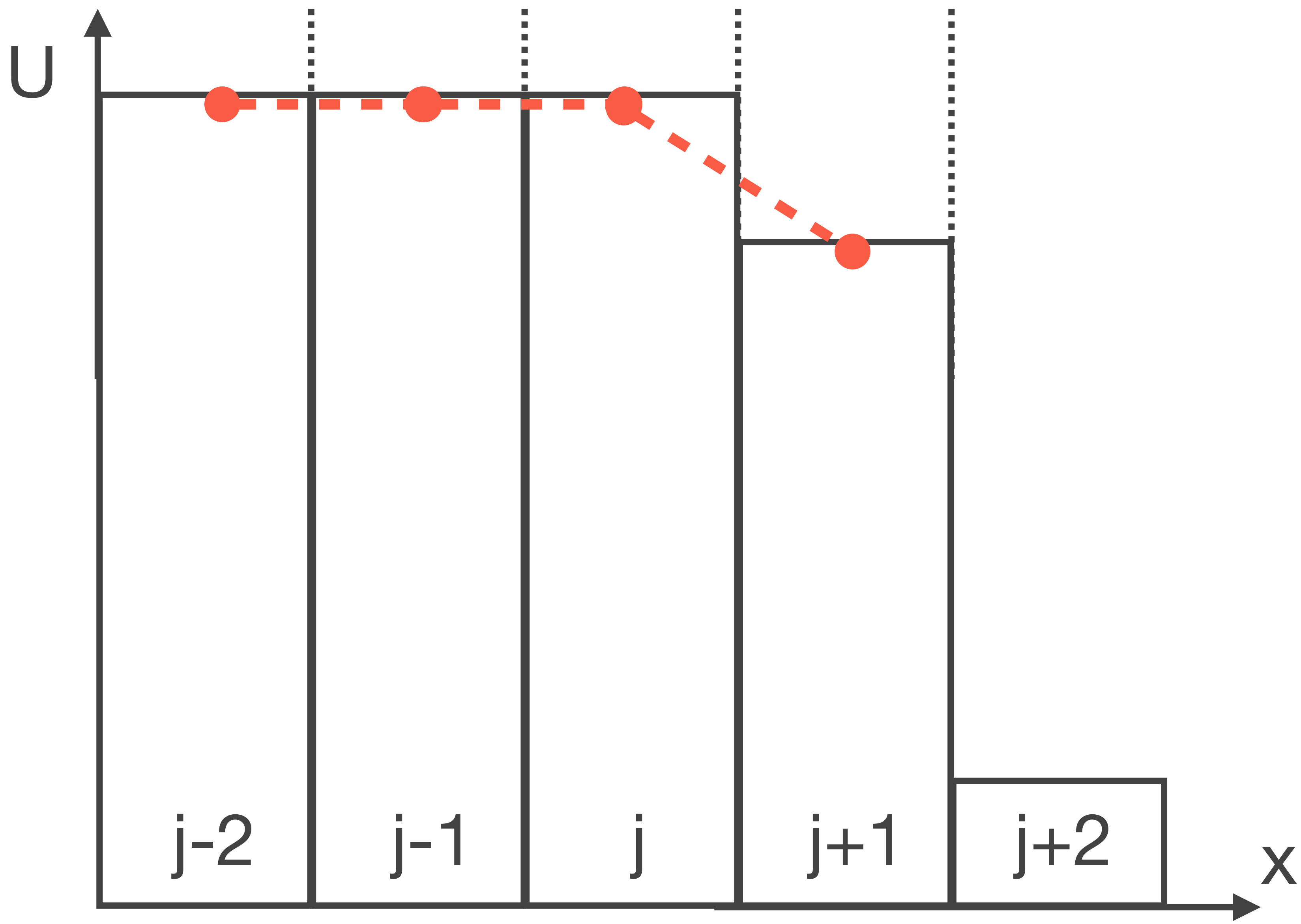
MUSCL法 | セル内の物理量分布（minmodリミター）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j\,(x - x_j)\,,\quad \boxed{\Delta_j = \mathrm{minmod}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x}, \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}\right)}$$



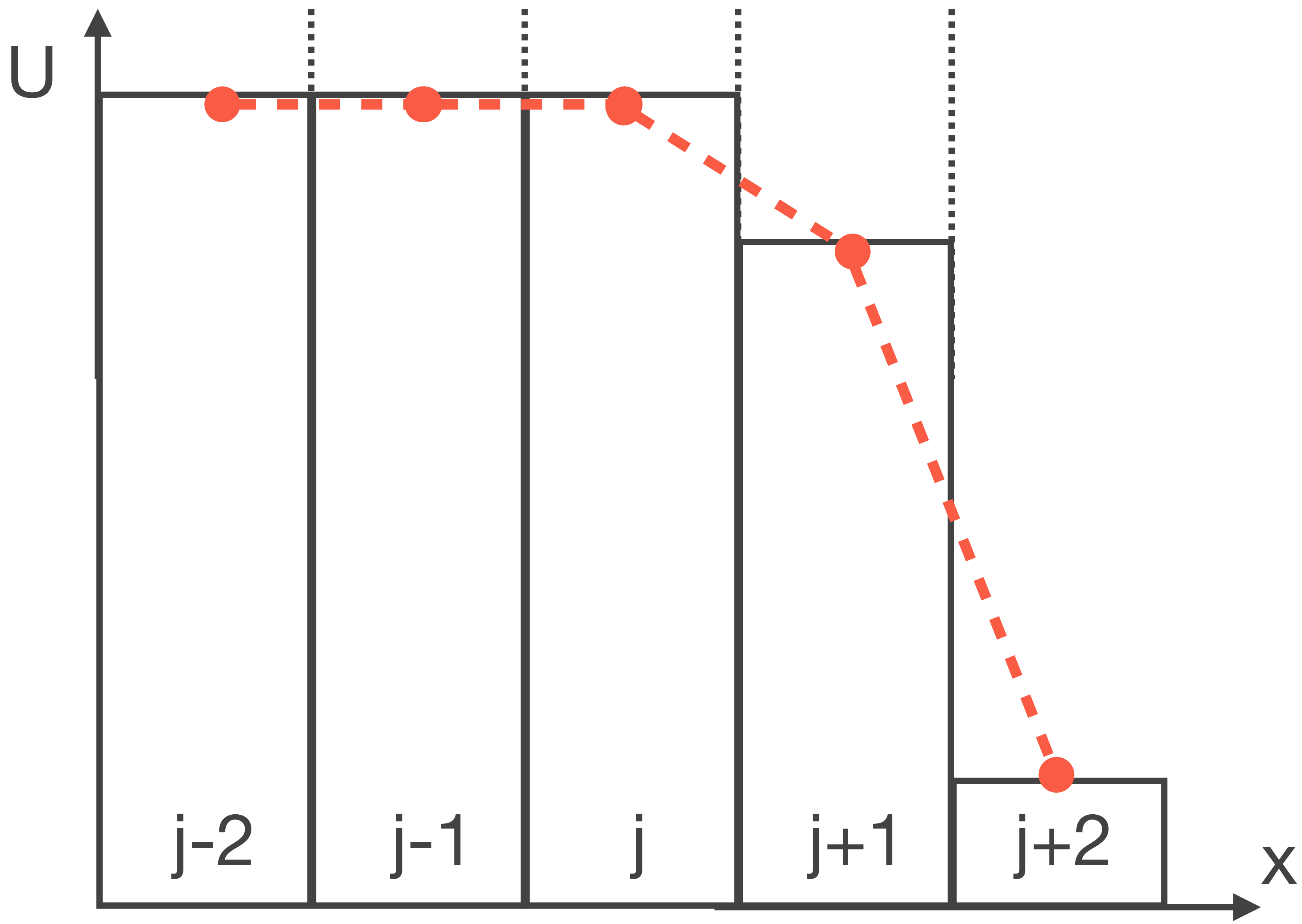
MUSCL法 | セル内の物理量分布（minmodリミター）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j\,(x - x_j)\,,\quad \boxed{\Delta_j = \mathrm{minmod}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x}, \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}\right)}$$



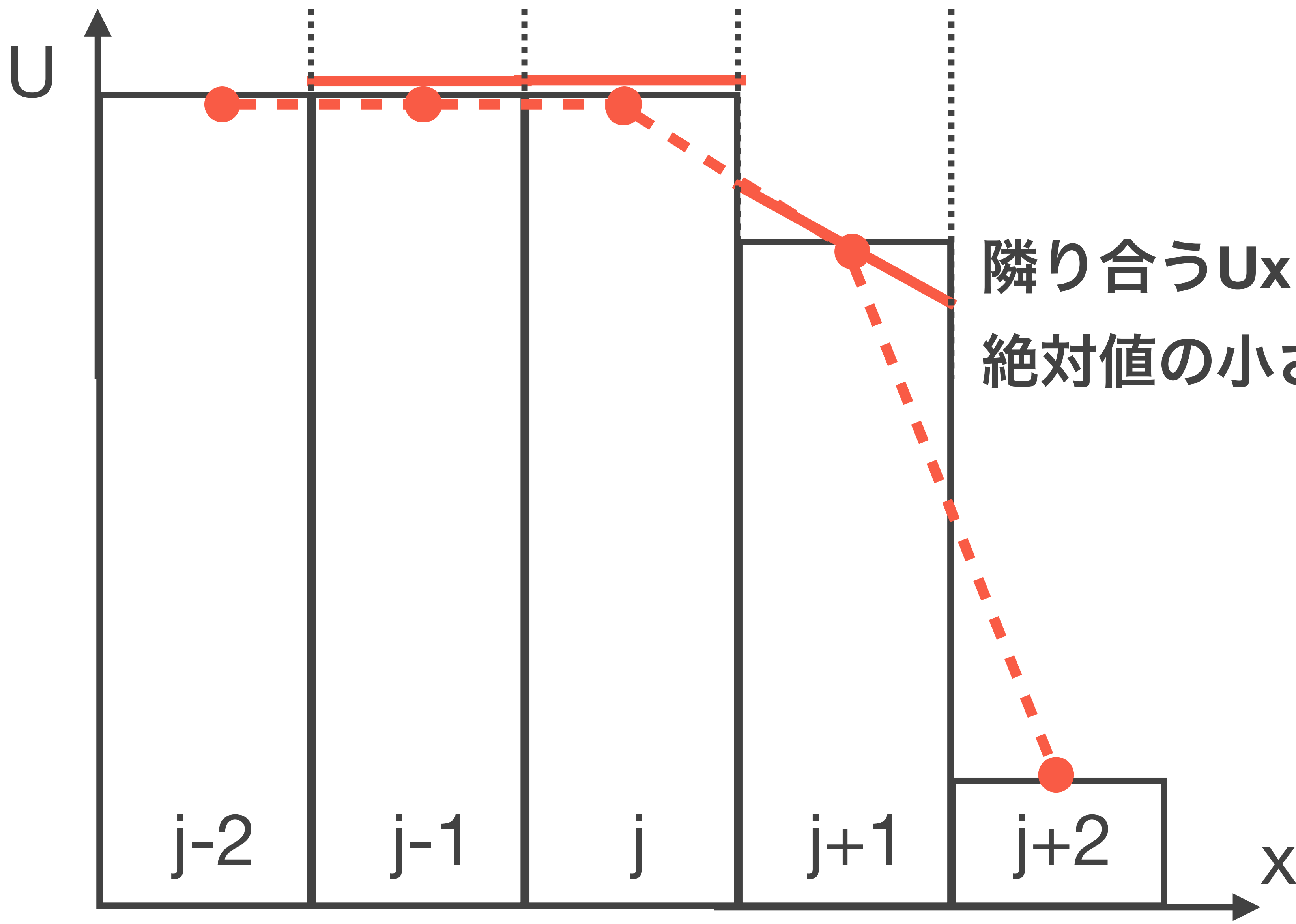
MUSCL法 | セル内の物理量分布（minmodリミター）

$$U_j(x) = U_j + \Delta_j\,(x - x_j)\,,\ \boxed{\Delta_j = \mathrm{minmod}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x}, \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}\right)}$$



MUSCL法 | セル内の物理量分布（minmodリミター）

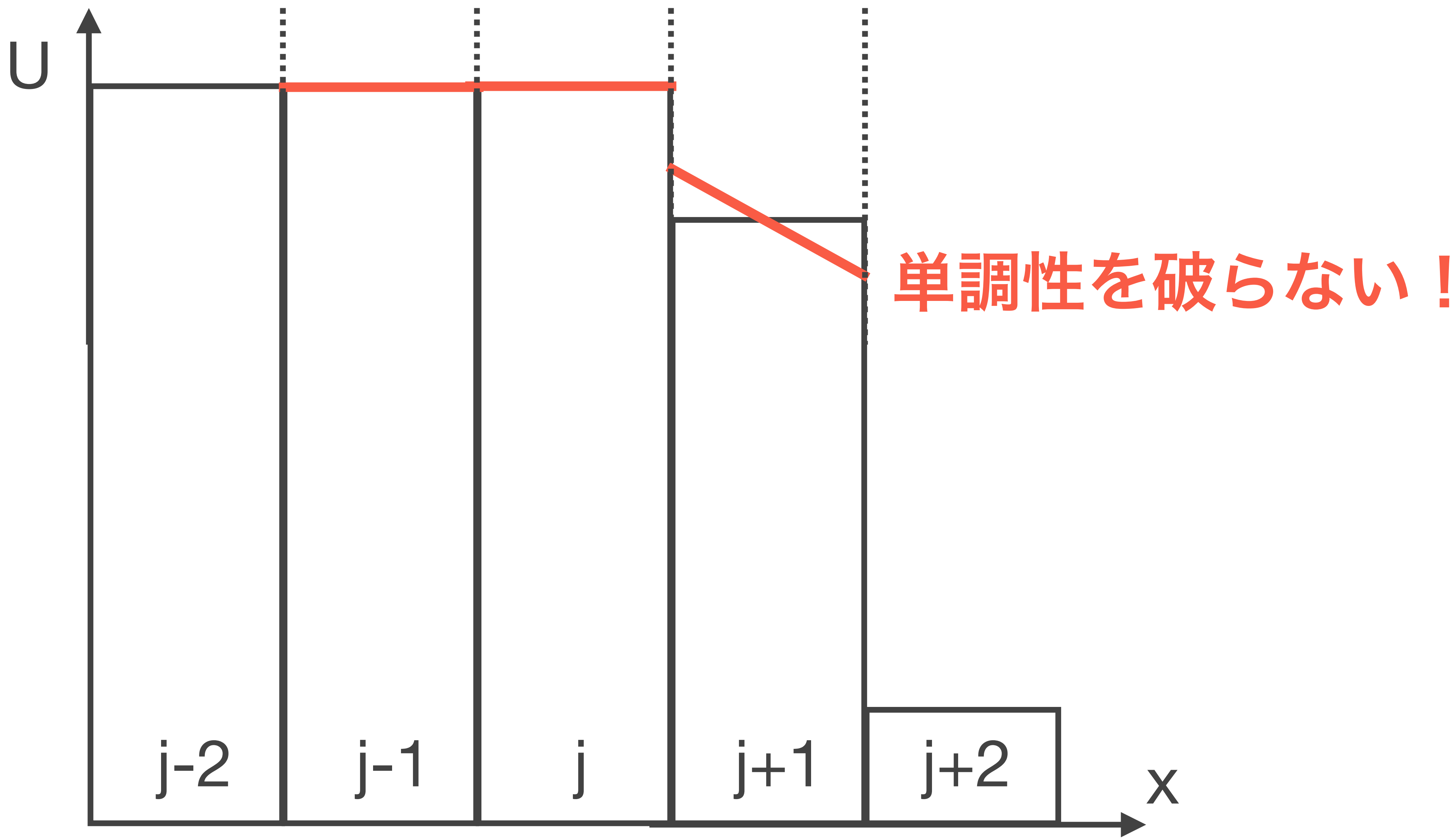
$$U_j(x) = U_j + \Delta_j (x - x_j), \quad \boxed{\Delta_j = \mathrm{minmod}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x}, \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}\right)}$$



隣り合うUxの内、
絶対値の小さいものを選択。

MUSCL法 | セル内の物理量分布（minmodリミター）

$$\boxed{U_j(x) = U_j + \Delta_j\,(x - x_j)},\ \ \Delta_j = \mathrm{minmod}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x}, \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}\right)$$



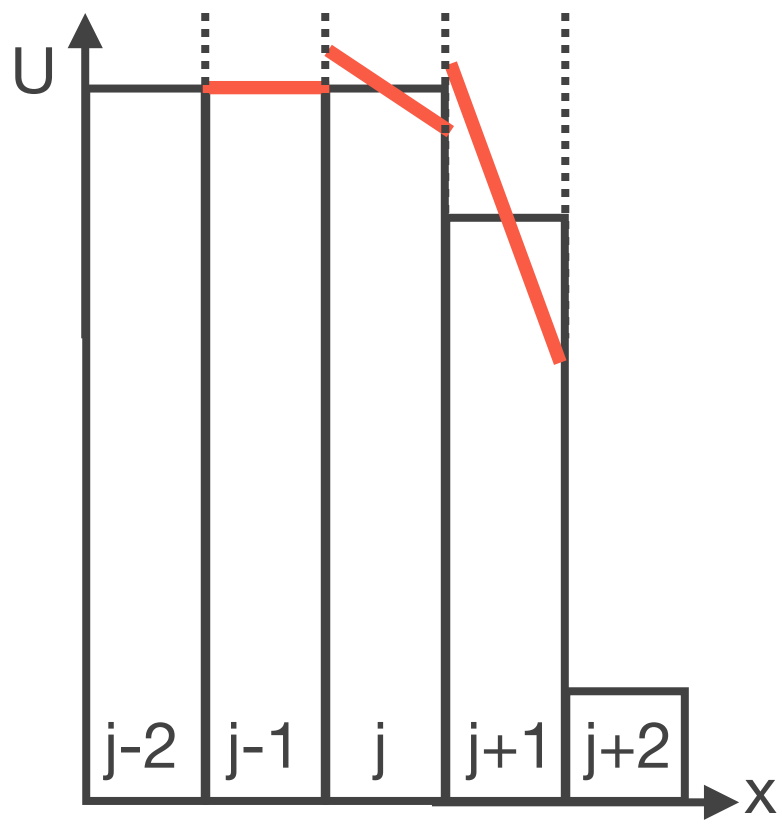
MUSCL法

再掲

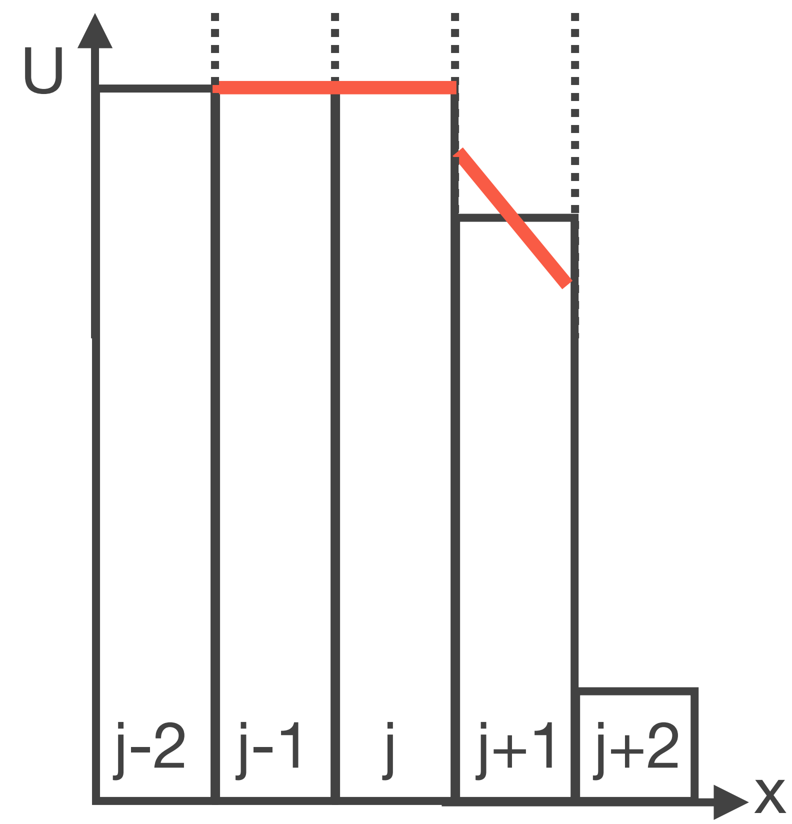
セル境界の補間値（リミターΦが対称な場合; $\Phi(r) = r\Phi(1/r)$）

$$U^L_{i+1/2} = U_j + \frac{1}{2}\Delta_j,\ U^R_{j-1/2} = U_j - \frac{1}{2}\Delta_j$$

$$\begin{aligned}\Delta_j &= \mathrm{Limiter}\left(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}\right) \\ &= \Phi(1/r)(U_{j+1} - U_j) = \Phi(r)(U_j - U_{j-1})\end{aligned}$$



リミター無し（線形補間）



リミター有り（minmod）

流速制限関数

制限されたセル内のスロープ

$$\Delta_j = \mathrm{Limiter}\left(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}\right)$$

Minmod（Roe, 1986）

$$\mathrm{minmod}\left(a, b\right) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sgn}(a) + \mathrm{sgn}(b)\right]\min\left(|a|, |b|\right)$$

Monotonized Central (MC)（van Leer, 1977）

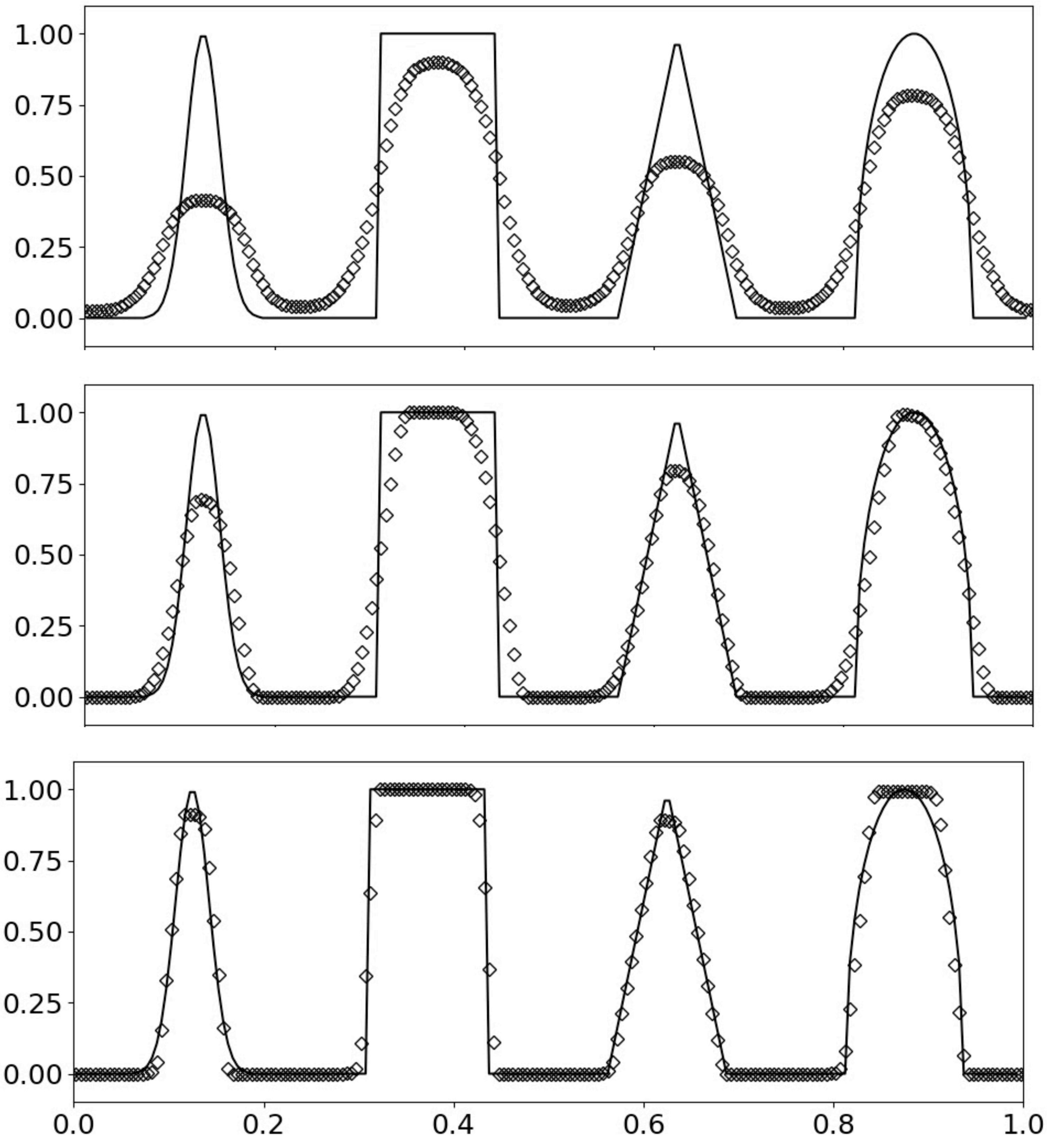
$$\mathrm{MC}\left(a, b\right) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sgn}(a) + \mathrm{sgn}(b)\right]\min\left(2|a|, \frac{|a+b|}{2}, 2|b|\right)$$

Superbee（Roe, 1986）

$$\mathrm{Superbee}\left(a, b\right) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sgn}(a) + \mathrm{sgn}(b)\right]$$

$$\max\left[\min\left(2|a|, |b|\right), \min\left(|a|, 2|b|\right)\right]$$

MUSCLスキームの比較



Minmodリミター

(Roe, 1986)

MCリミター

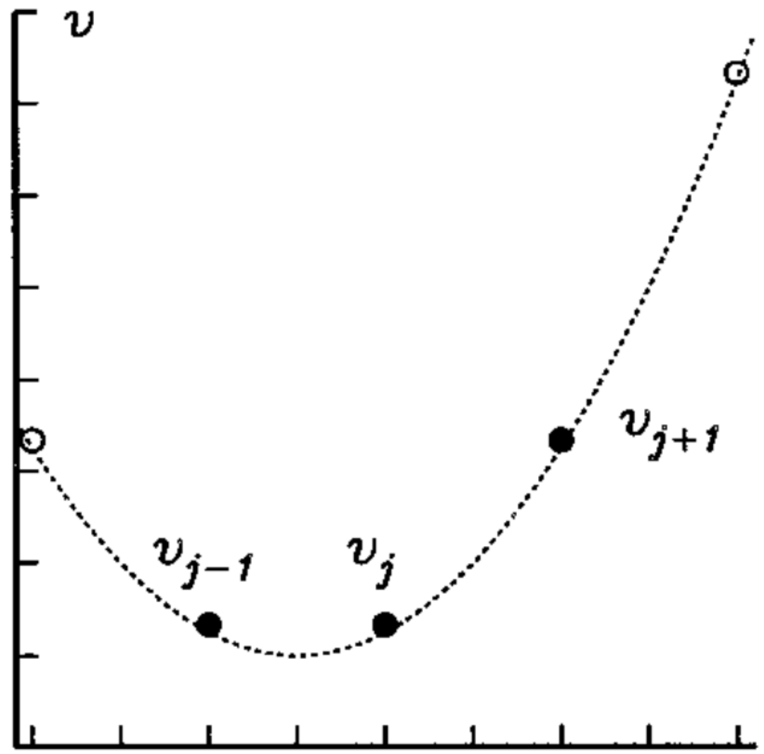
(van Leer, 1974)

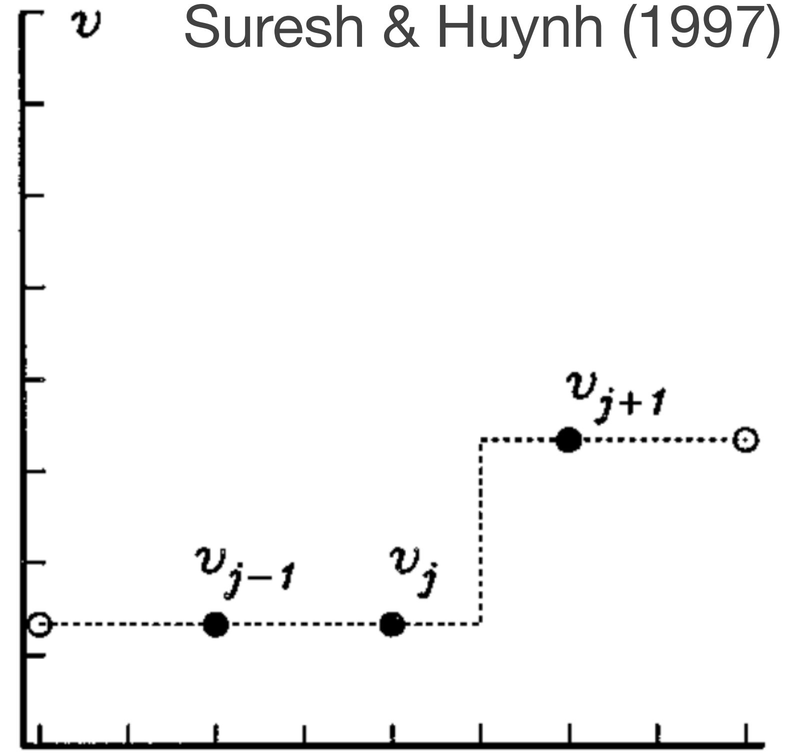
Superbeeリミター

(Roe, 1986)

TVDスキームの限界

MUSCL法のような3点ステンシルのTVDスキームでは、なめらかな極値と不連続を区別出来ない。





これを回避するため、なめらかな極値を保つようなリミター（MP5）や、なめらかなステンシルを上手く選択する（WENO）ような非TVDスキームが提案されている。

単調性とTVD

再掲

TVDスキーム:

スキームが以下の条件を満たす時、TVDスキームと呼ぶ。

$$TV(u_j^{n+1}) \leq TV(u_j^n),\ TV(u_j) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|$$

単調性保持スキーム:

nステップ目の解 u^n_j が単調な時、

次のn+1ステップ目の解 u^{n+1}_j も単調になるスキーム。

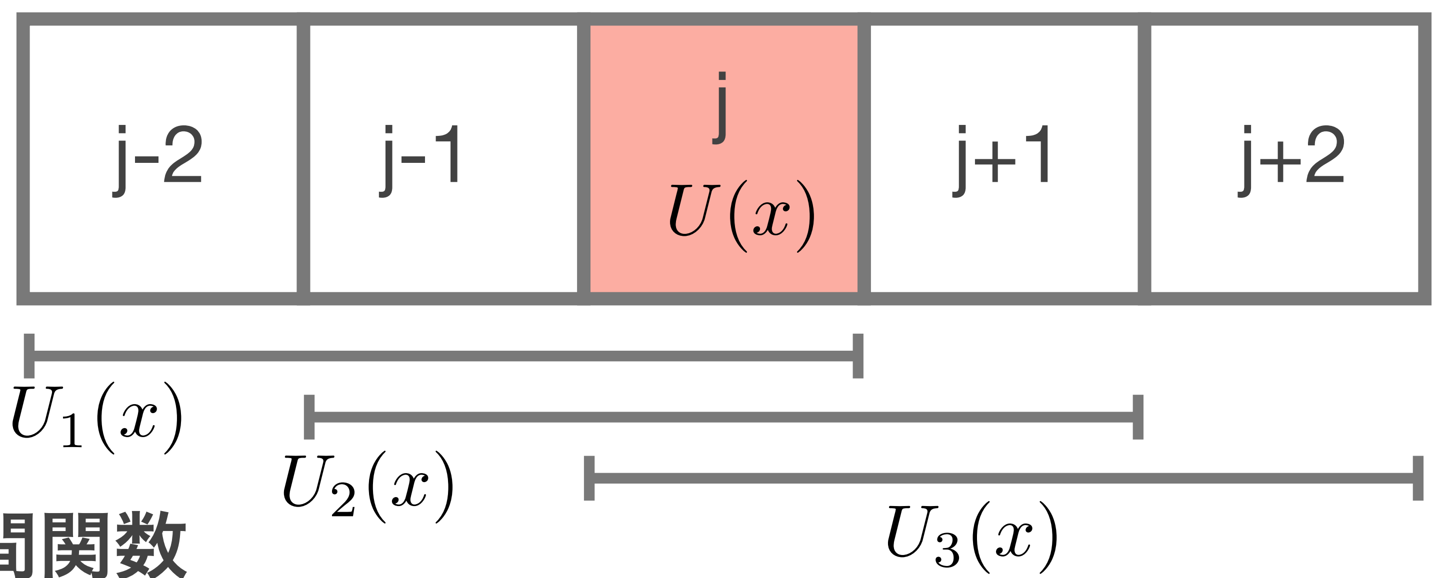
Harten (1983):

TVDスキームは、

単調性保持スキームである。

WENO法

Weighted Essentially Non-Oscillatory Scheme
(**WENO**; Liu et al., 1994; Jiang & Shu, 1999)



線形補間関数

$$U_k(x) = U_k^{(0)} + U_k^{(1)}(x - x_j) + U_k^{(2)}(x - x_j)^2$$

重み付け平均補間関数

$$U(x) = w_1 U_1(x) + w_2 U_2(x) + w_3 U_3(x)$$

セル内の物理量の分布 U(x) を異なるステンシルで評価された

線形補間関数U_1, U_2, U_3の重み付け平均として計算。

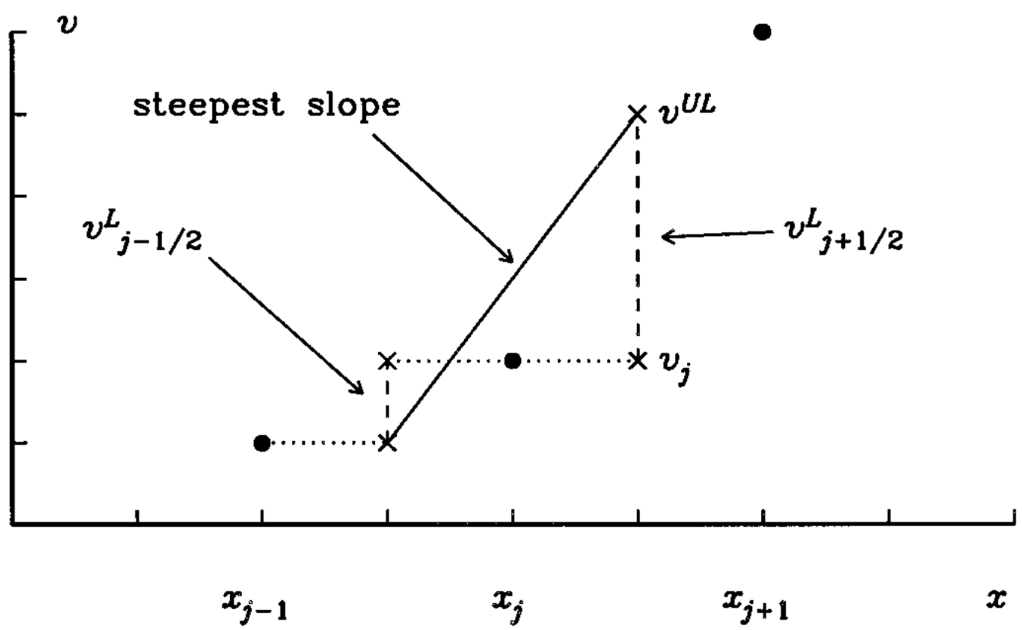
重みは不連続を含むステンシルで小さくなるような非線形関数。

MP5法

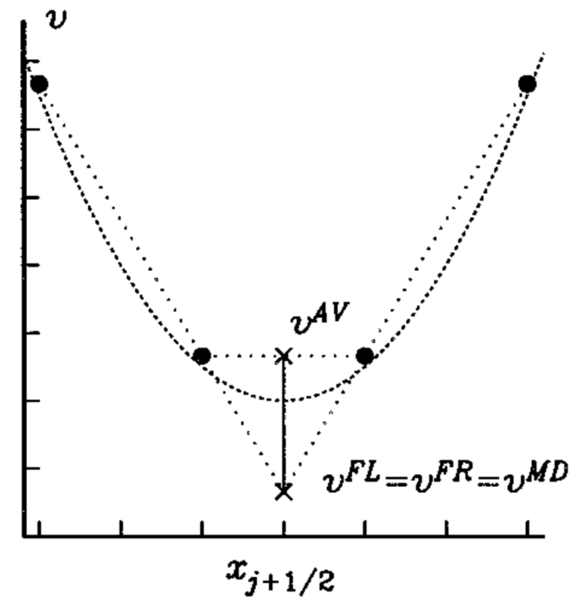
Accurately Monotonicity Preserving scheme

(**MP5**; Suresh & Huynh, 1997)

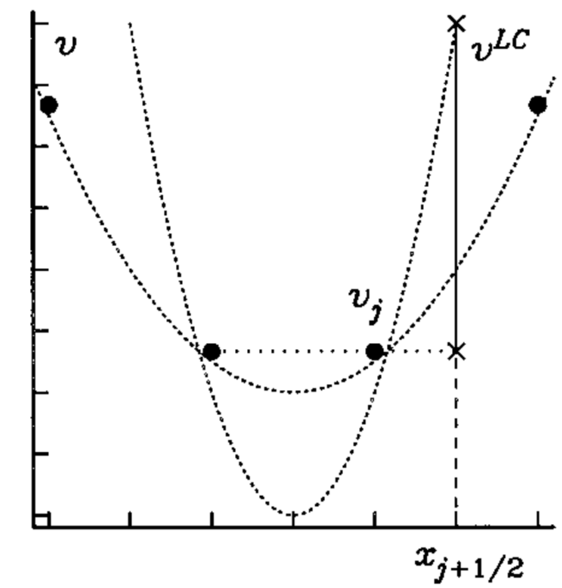
Upper **L**imit for monotonicity



Me**D**ian of AV/FL/FR



Large **C**urvature



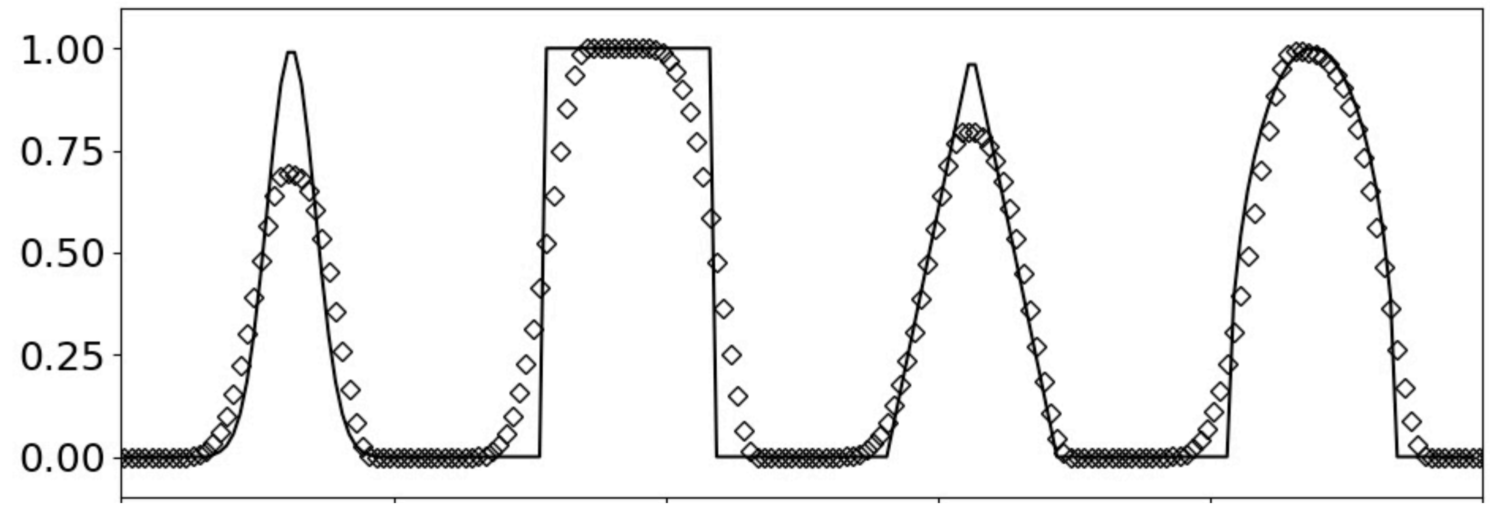
$$U^{L*}_{j+1/2} = \left(2U_{j-2} - 13U_{j-1} + 47U_j + 27U_{j+1} - 3U_{j+2}\right)/60$$

$$U^{L}_{j+1/2} = \mathrm{median}\left(U^{L*}_{j+1/2}, U_{\mathrm{min}}, U_{\mathrm{max}}\right)$$

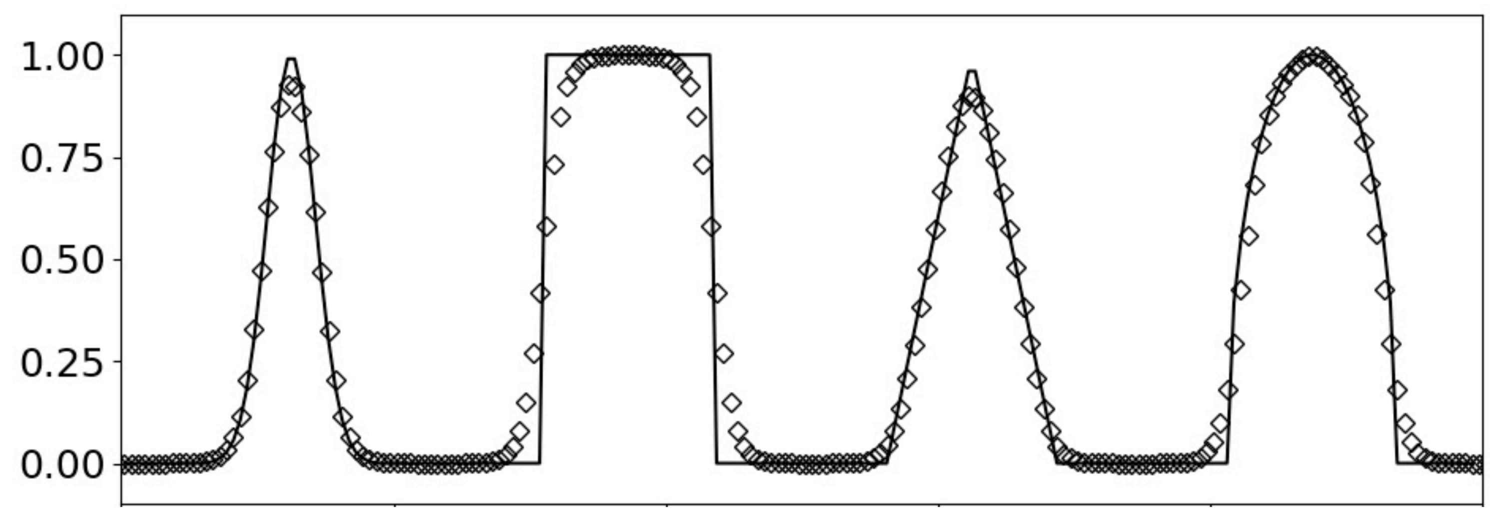
複数の条件からセル境界の風上補間値を制限。

単調性を保ちつつ、極値があれば極値も保つ。

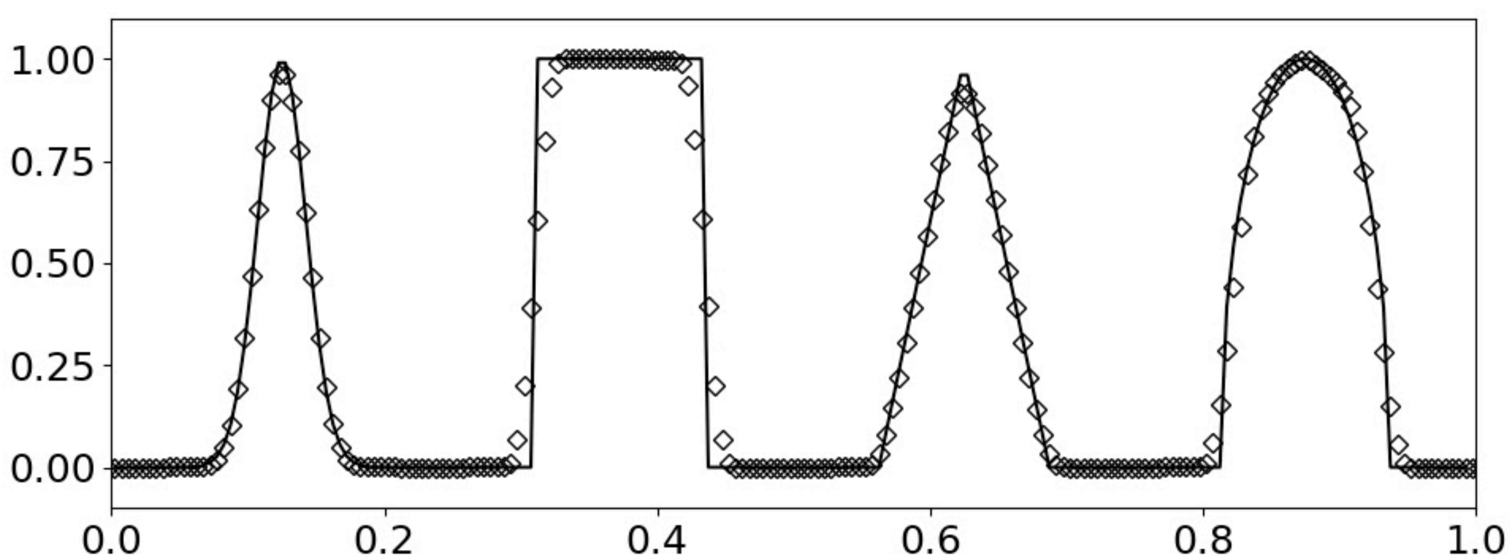
移流スキームの比較



MUSCL-MC



WENO5
(Jiang & Shu, 1996)



MP5
(Suresh & Huynh, 1997)

時間高次精度化 | SSP Runge-Kutta法

Strongly Stability Preserving Runge-Kutta method
(SSP RK; TVD RK; Shu & Osher, 1988)

流体・MHD計算のように**衝撃波・不連続**を含む場合、通常のRK法で行うような線形安定性解析では不十分。

SSP Runge-Kutta法では、もし前進Euler法に関して数値スキームがTVD条件

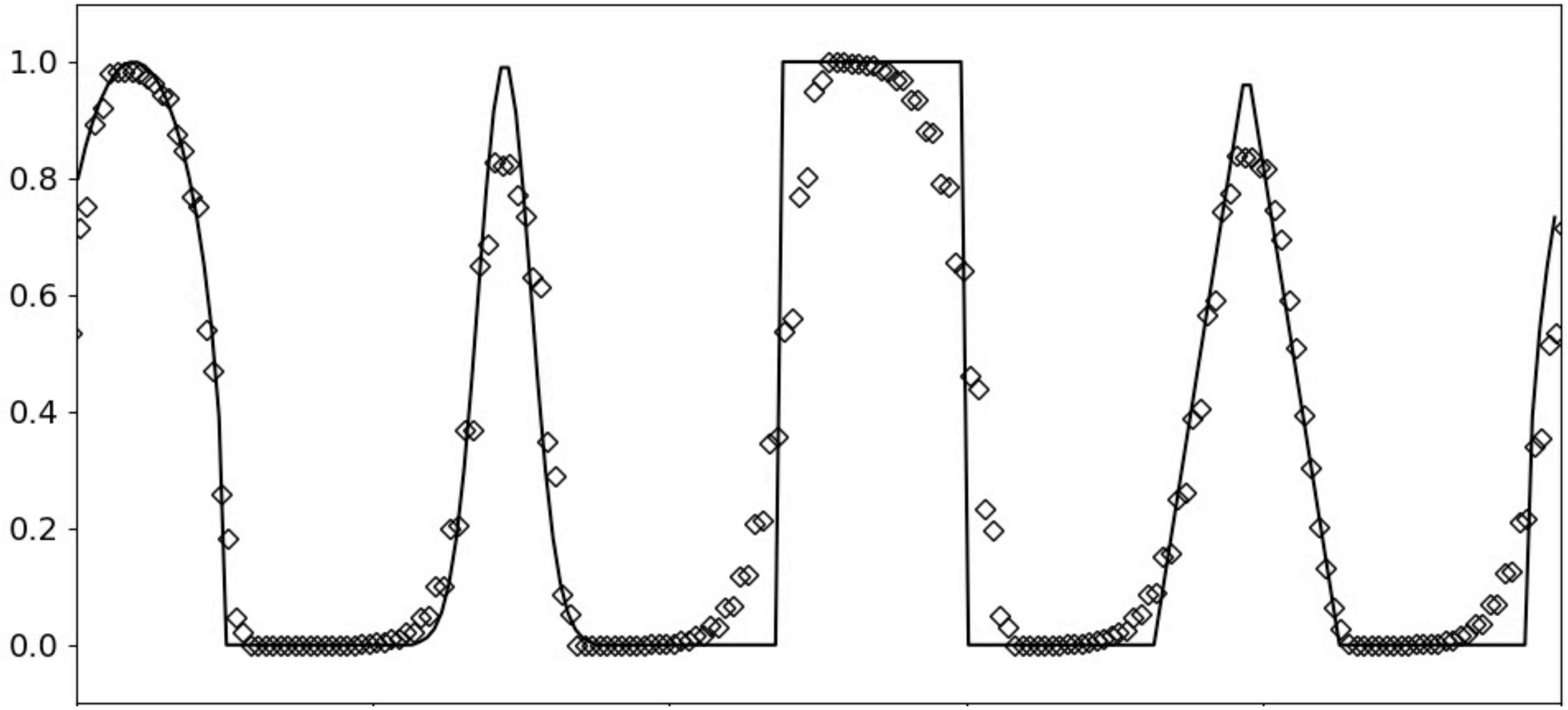
$$\mathrm{TV}\left[U^n + \Delta t F(U^n)\right] \leq \mathrm{TV}\left[U^n\right]$$

を満たすなら、適切な $\Delta t < \Delta t_{\mathrm{SSP}}$ のもと、SSP Runge-Kutta法で積分した $n+1$ ステップ目の解 U^{n+1} もTVD条件

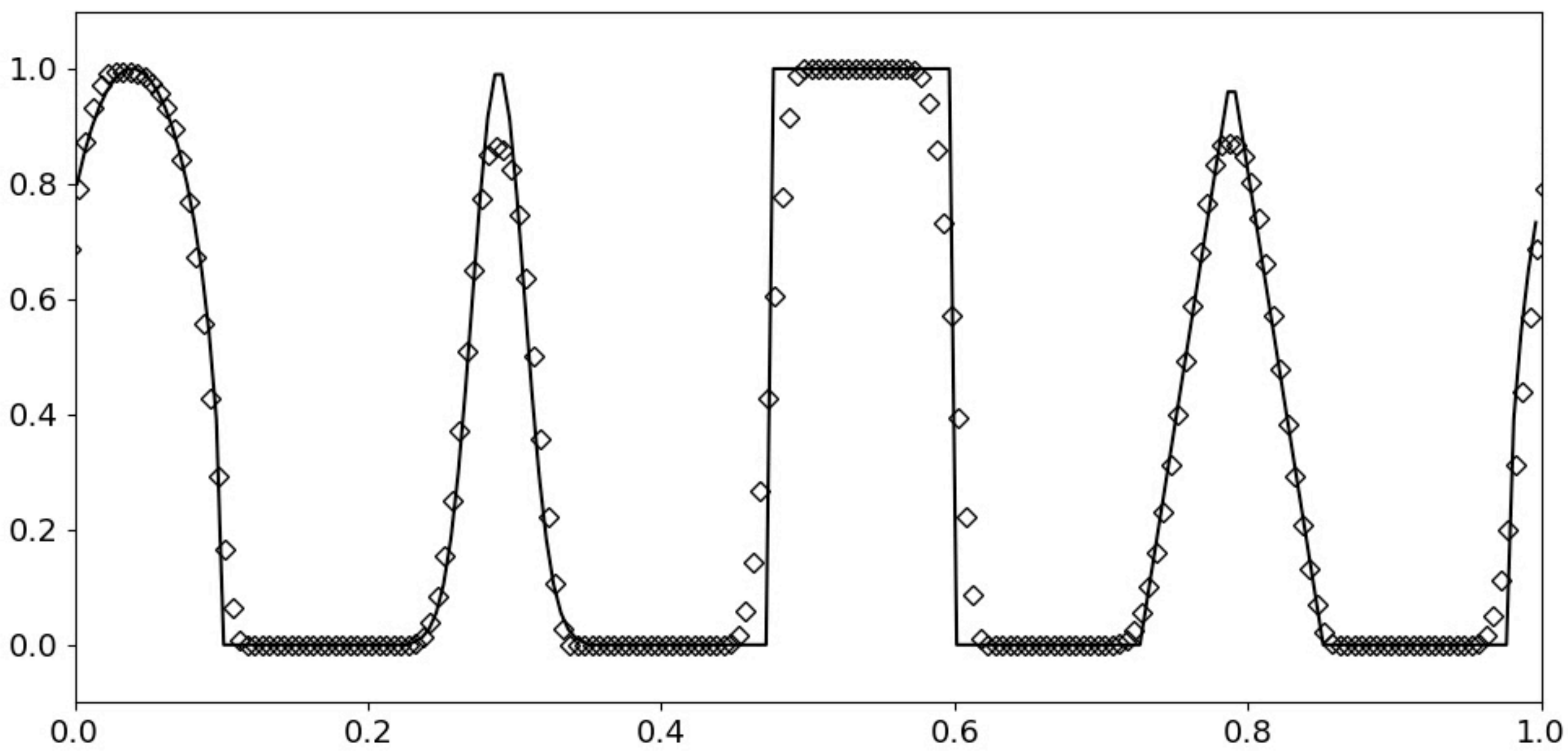
$$\mathrm{TV}\left[U^{n+1}\right] \leq \mathrm{TV}\left[U^n\right]$$

を満たすことが保証される。このため、**解の単調性を保ったまま時間方向に高次精度化**することが可能。

時間積分法の高次精度化



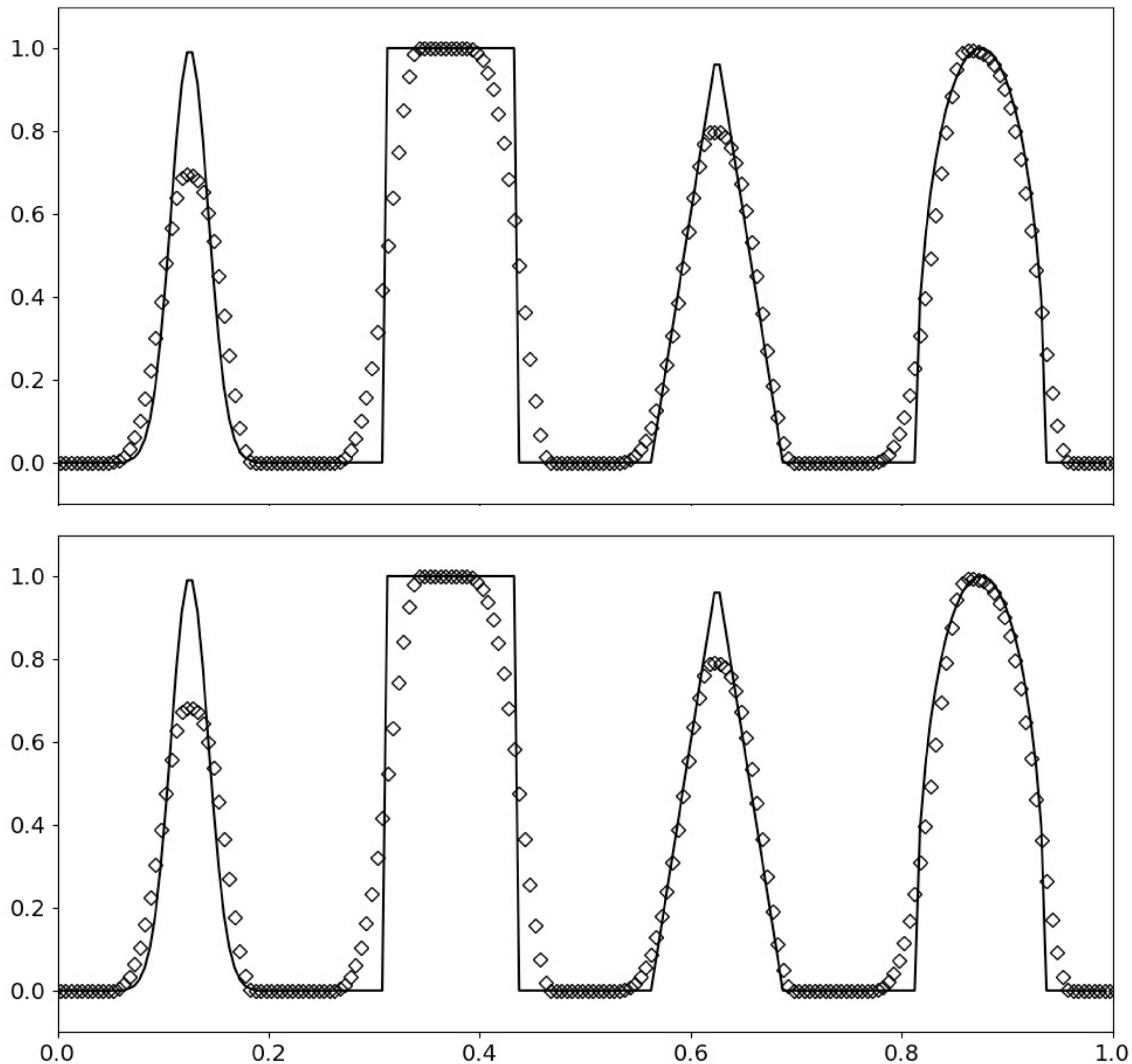
Non SSPRK(5,3)
CFL = 0.8
MUSCL-MC



SSPRK(5,3)
CFL = 0.8
MUSCL-MC

非SSPなRKでは、線形安定なCFLでも、不連続があると解の単調性が保てない。

時間積分法の高次精度化



Non SSPRK(5,3)
CFL = **0.7**
MUSCL-MC

SSPRK(5,3)
CFL = **1.3**
MUSCL-MC

単調性・TVDが保てる
CFL数で比べると、
SSPRKの方が効率的。

Optimal SSP Runge-Kutta法

同じステップ数、同じ精度で、TVDを保てるCFLが最も大きいSSP Runge-Kutta法。

以下の2次、3次のOptimal SSPRKがよく使われる。

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

1次精度; 前進Euler法

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t f(y^n)$$

2次精度; SSPRK(2, 2)

$$y^{(1)} = y^n + \Delta t f(y^n)$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{2} y^n + \frac{1}{2}\left[y^{(1)} + \Delta t f(y^{(1)})\right]$$

3次精度; SSPRK(3, 3)

$$y^{(1)} = y^n + \Delta t f(y^n)$$

$$y^{(2)} = \frac{3}{4} y^n + \frac{1}{4}\left[y^{(1)} + \Delta t f(y^{(1)})\right]$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{3} y^n + \frac{2}{3}\left[y^{(2)} + \Delta t f(y^{(2)})\right]$$

1次元MHD方程式の
高次精度化

1次元理想MHD方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \\ B_y \\ B_z \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_x^2 + p_T - B_x^2 \\ \rho V_y V_x - B_x B_y \\ \rho V_z V_x - B_x B_z \\ B_y V_x - B_x V_y \\ B_z V_x - B_x V_z \\ (e + p_T) V_x - B_x (V_x B_x + V_y B_y + V_z B_z) \end{pmatrix}$$

$$p_T = p + \frac{1}{2}\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right)$$

$$p = (\gamma - 1)\left[e - \frac{1}{2}\rho\left(u^2 + v^2 + w^2\right) - \frac{1}{2}\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right)\right]$$

制約条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より B_x は空間・時間に関して一定。

システム方程式への適用

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_j}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{F}_{j+1/2} - \boldsymbol{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = 0$$

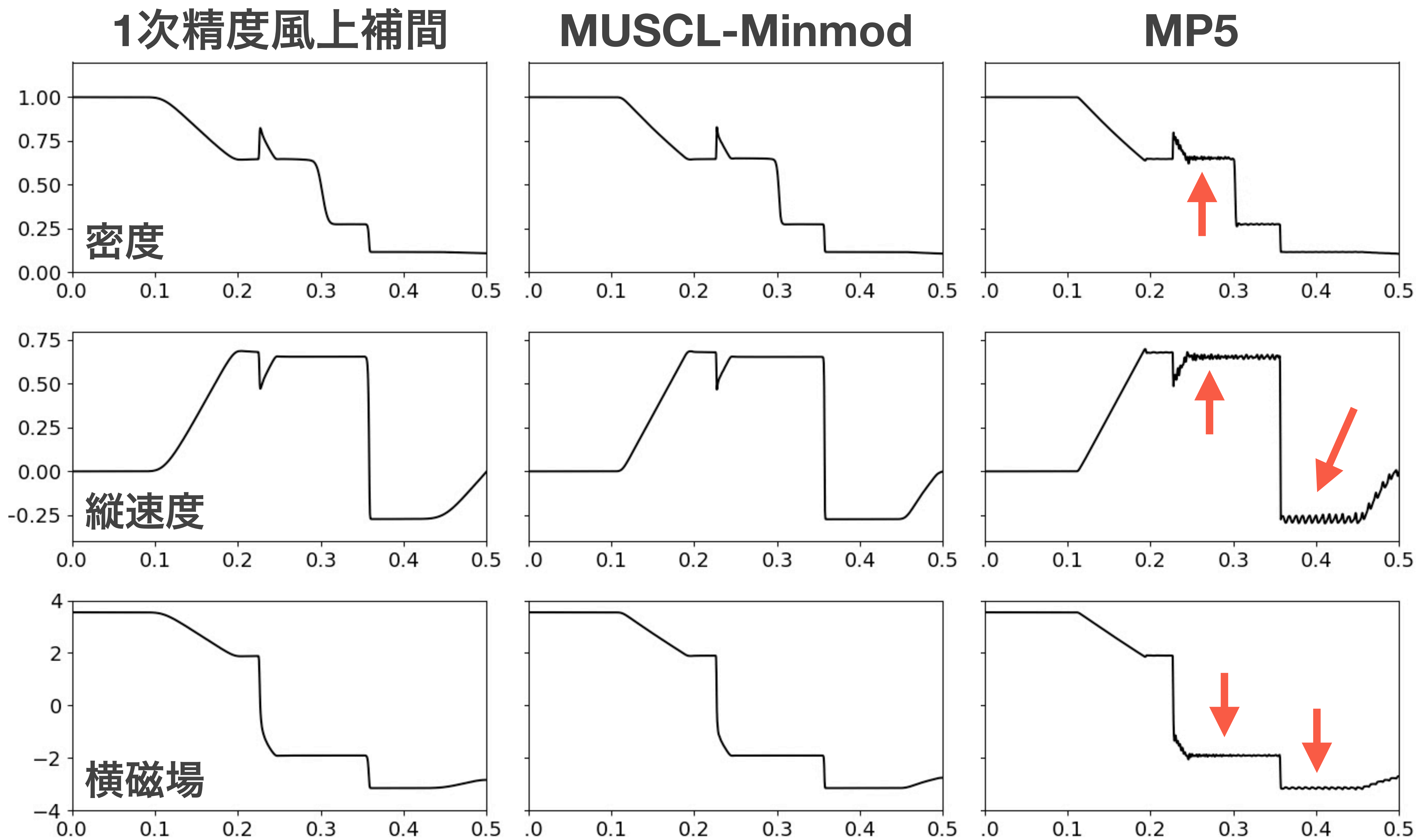
$$\boldsymbol{F}_{j+1/2} = \mathrm{Riemann}\left(\boldsymbol{U}^L_{j+1/2}, \boldsymbol{U}^R_{j+1/2}\right)$$: HLL, HLLD, Roe, …

$$\boldsymbol{U}^L_{j+1/2} = \begin{cases} \boldsymbol{U}_j \\ \mathrm{MUSCL}\left(\boldsymbol{U}_{j-1}, \boldsymbol{U}_j, \boldsymbol{U}_{j+1}\right) \\ \mathrm{WENO5}\left(\boldsymbol{U}_{j-2}, \boldsymbol{U}_{j-1}, \boldsymbol{U}_j, \boldsymbol{U}_{j+1}, \boldsymbol{U}_{j+2}\right) \\ \mathrm{MP5}\left(\boldsymbol{U}_{j-2}, \boldsymbol{U}_{j-1}, \boldsymbol{U}_j, \boldsymbol{U}_{j+1}, \boldsymbol{U}_{j+2}\right) \\ \ldots \end{cases}$$

$U^R_{j-1/2}$は$U^L_{j+1/2}$で…, j-2, j-1, j, j+1, j+2, …を逆順にしたもの。

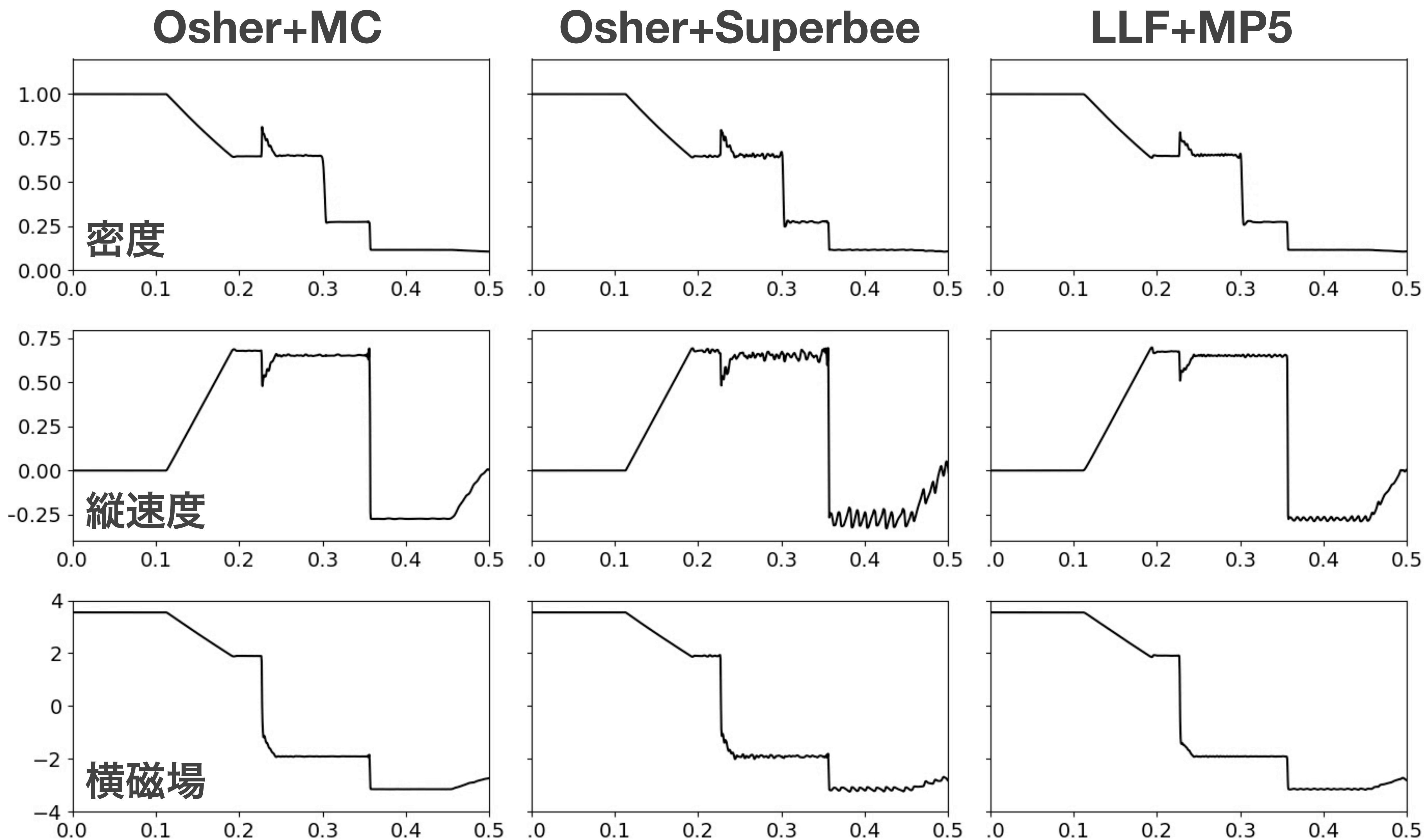
時間積分法は引き続きSSP Runge-Kutta法を使用。

MHD衝撃波管 (Brio & Wu, 1988) | 保存変数補間



Osherの近似リーマンソルバー、3次精度SSP RK法

MHD衝撃波管 (Brio & Wu, 1988) | 保存変数補間



3次精度SSP RK法

リーマン不変量

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + A\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0$$

$$A = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}} = R\Lambda L,\ \ RL = LR = I$$

$$L\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \Lambda \cdot L\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x} = 0$$

A: ヤコビアン行列, R/L: Aの左右固有行列

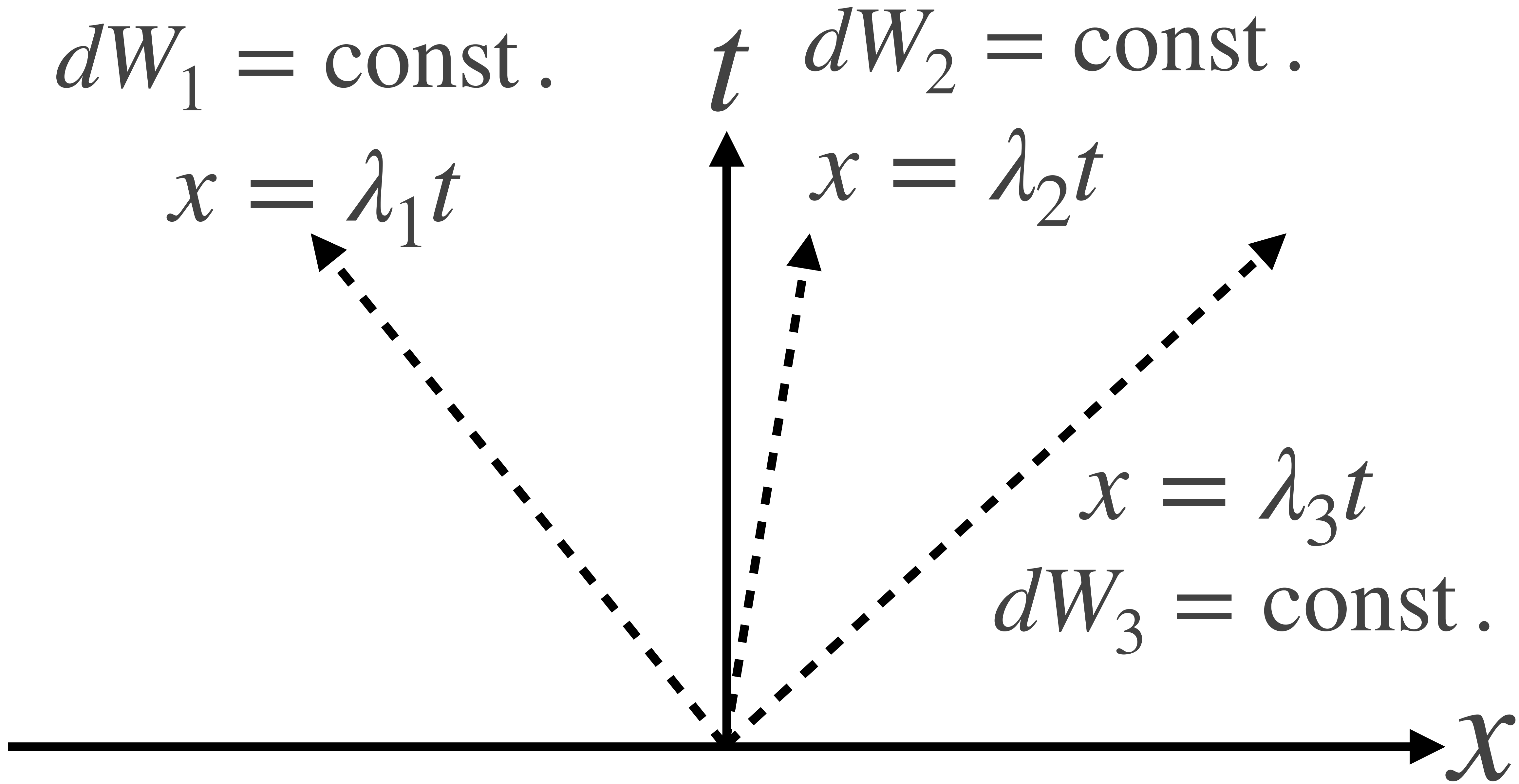
Λ: Aの固有値（実数）を要素とする対角行列

特性量（リーマン不変量）$dW = LdU$ は

位相速度 Λ の特性線に沿って一定。

空間補間もリーマン不変量に関して行いたい。

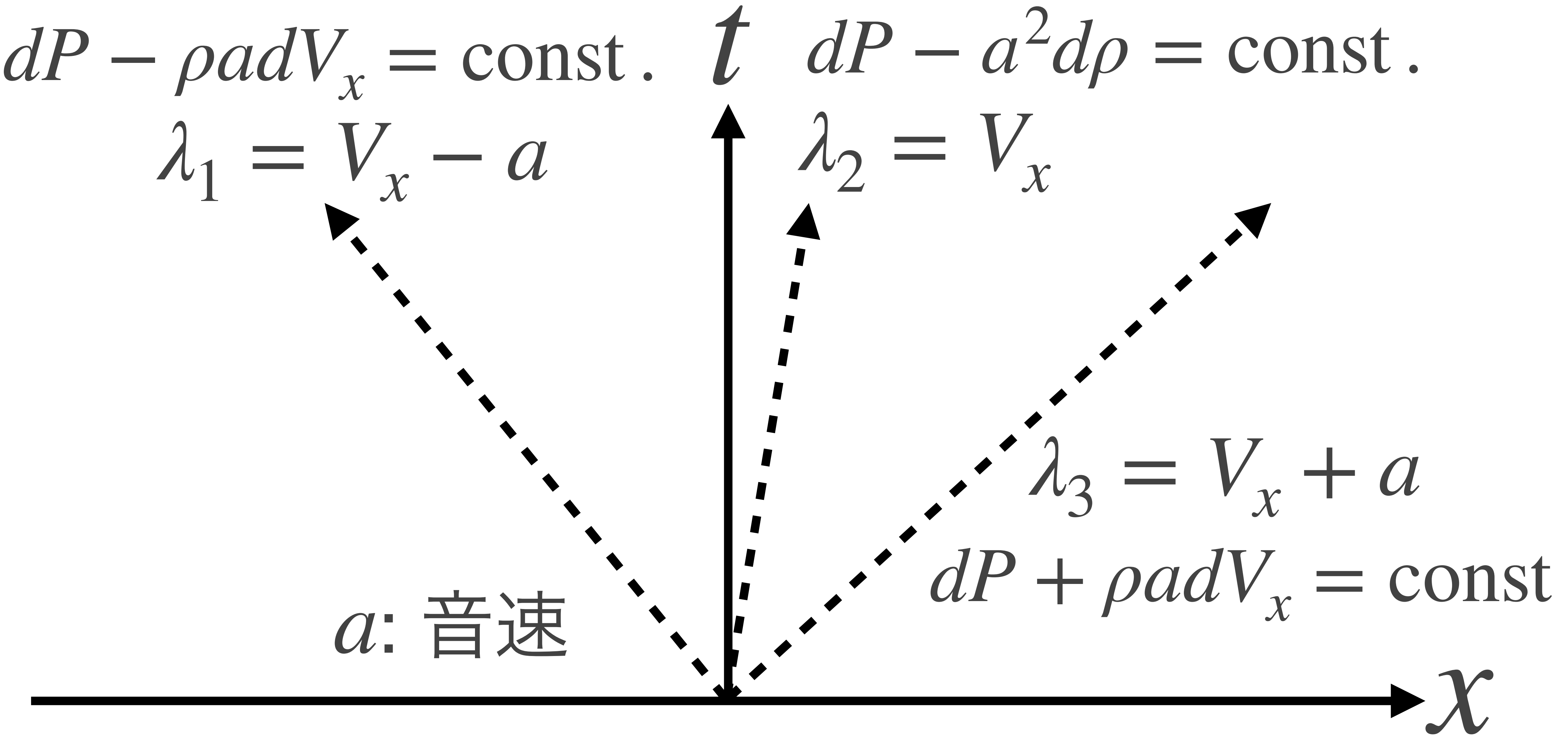
リーマン不変量



特性量（リーマン不変量）$dW = LdU$ は

位相速度 Λ の特性線に沿って一定。

リーマン不変量 | 1次元オイラー方程式の場合



特性線は左向き音波、エントロピー波、右向き音波の3つ

V_y, V_z を考慮すると$\lambda = V_x$, $dW = dV_y, dV_z$の2つの波が追加

特性量補間

保存量補間（MP5の場合）

$$U^L_{j+1/2} = \mathrm{MP5}\left(U_{j-2}, U_{j-1}, U_j, U_{j+1}, U_{j+2}\right)$$

特性量補間

$W_k = L_j U_{j+k}$: 保存量 => 特性量

$$W^L_{j+1/2} = \mathrm{MP5}\left(W_{-2}, W_{-1}, W_0, W_1, W_2\right)$$

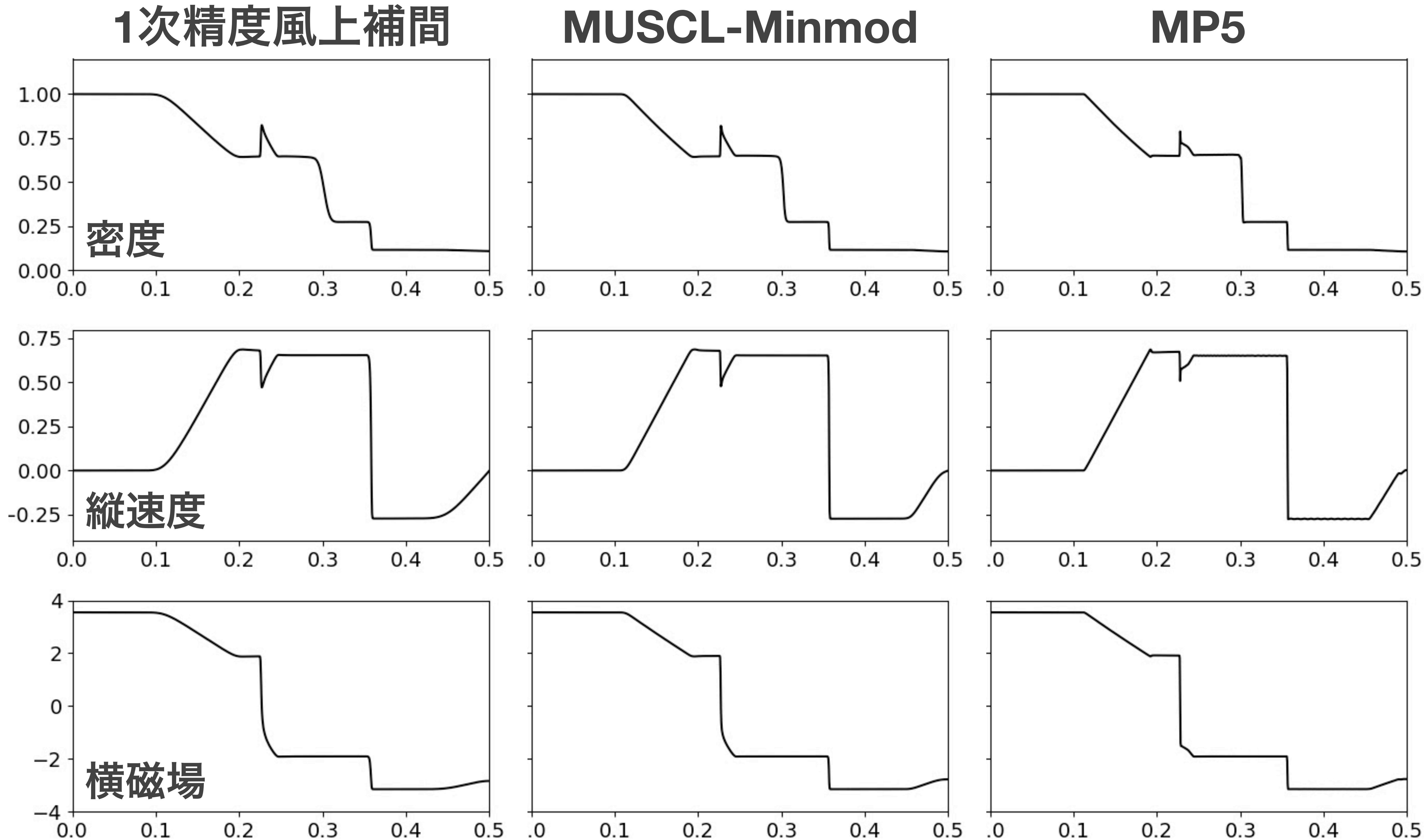
$U^L_{j+1/2} = R_j W^L_{j+1/2}$: 特性量 => 保存量

特性量の補間は高コスト、実装も面倒。

固有行列が明らかでない系には使えない。

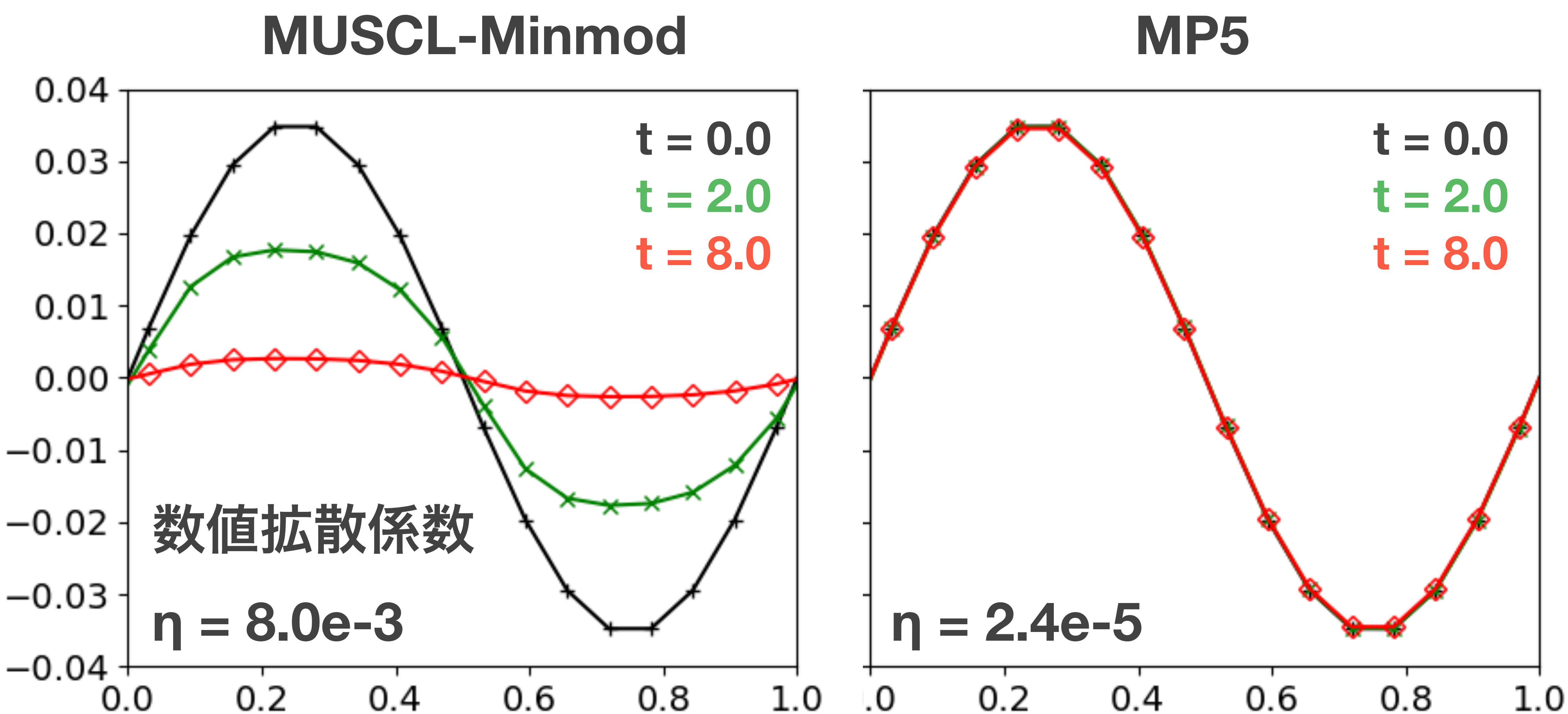
MHDの固有行列: e.g., Stone et al. (2008)

MHD衝撃波管 (Brio & Wu, 1988) | 特性量補間



Osherの近似リーマンソルバー、3次精度SSP RK法

アルフベン波 | 補間スキーム依存性

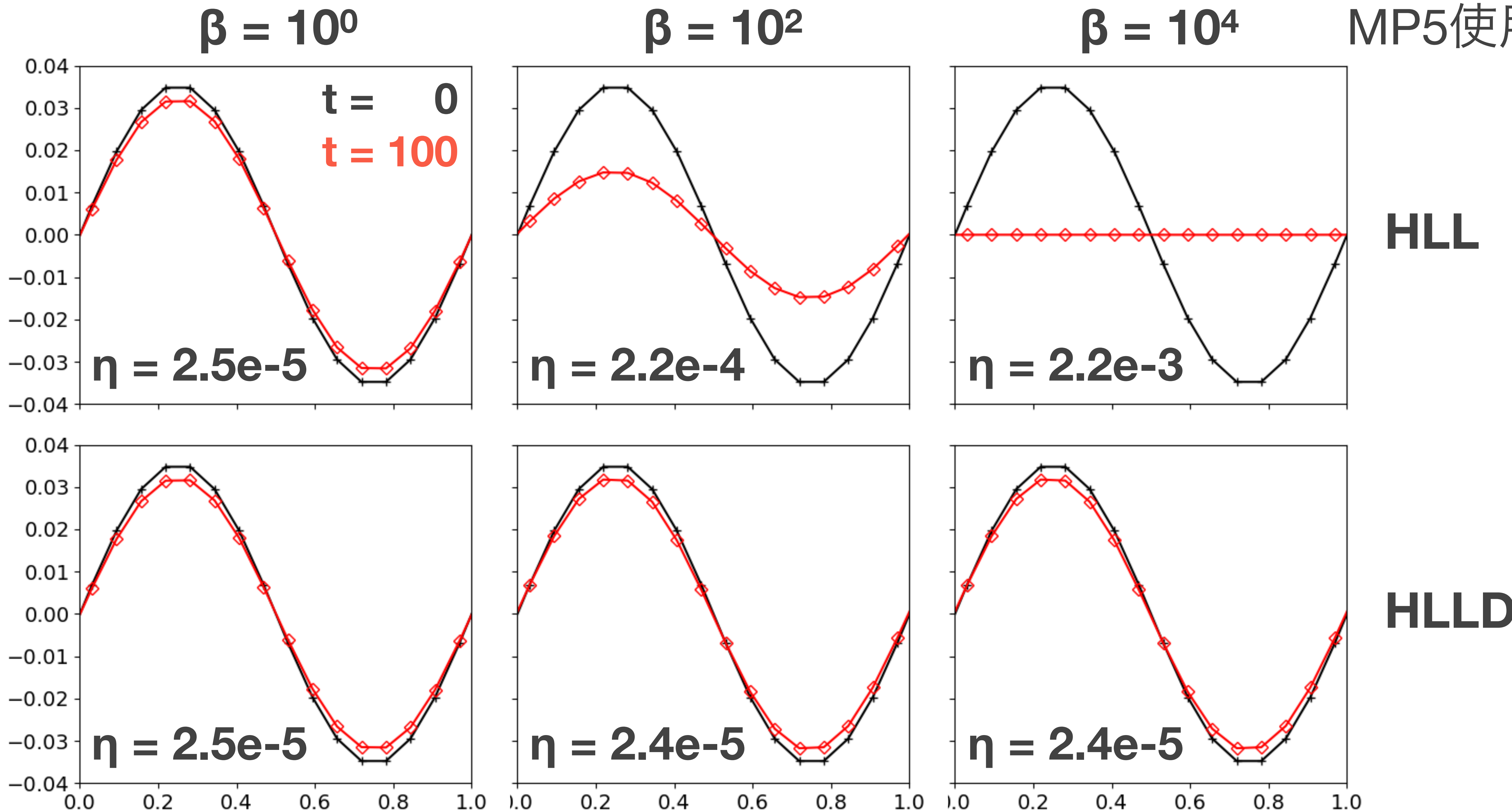


β = 10², HLLD使用

補間スキームを高次精度化することにより、
数値拡散による波の減衰が軽減。

アルフベン波 | リーマンソルバ依存性

MP5使用



$$\eta_{\mathrm{HLL}} \sim \frac{1}{2}\left(V_x + c_f\right)\Delta x \sim \frac{1}{2} c_s \Delta x$$

$$\eta_{\mathrm{HLLD}} \sim \frac{1}{2}\left(V_x + c_A\right)\Delta x \sim \frac{1}{2} c_A \Delta x$$

$$\rightarrow \quad \eta_{\mathrm{HLL}}/\eta_{\mathrm{HLLD}} \propto \beta^{1/2}$$

多次元MHD方程式の解法

空間補間手法

- **Unsplit dimension-by-dimension reconstruction**
  - 実装が簡単、計算量が少ない
  - 1次元スキームがそのまま使える
  - 有限体積法として少しいい加減
- **Genuinely 2D/3D reconstruction （e.g., Shi et al., 2001; Balsara et al., 2009）**
  - 実装が難しい、計算量が多い
  - 多次元と1次元で異なる非線形補間手法
  - 有限体積法としての理論的な整合性が良い

数値スキームの多次元化

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$I_{i,j} = \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right] \times \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right]$$

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{I_{i,j}} dxdy$$

セル(i,j)内で空間積分

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0$$

directionally unsplit（各方向を同時に時間積分）

$$F_{i+1/2,j} = \mathrm{Riemann}\left(U^L_{i+1/2,j}, U^R_{i+1/2,j}\right)$$

$$G_{i,j+1/2} = \mathrm{Riemann}\left(U^L_{i,j+1/2}, U^R_{i,j+1/2}\right)$$

$$U^L_{i+1/2,j} = \mathrm{MP5}\left(U_{i-2,j}, U_{i-1,j}, U_{i,j}, U_{i+1,j}, U_{i+2,j}\right)$$

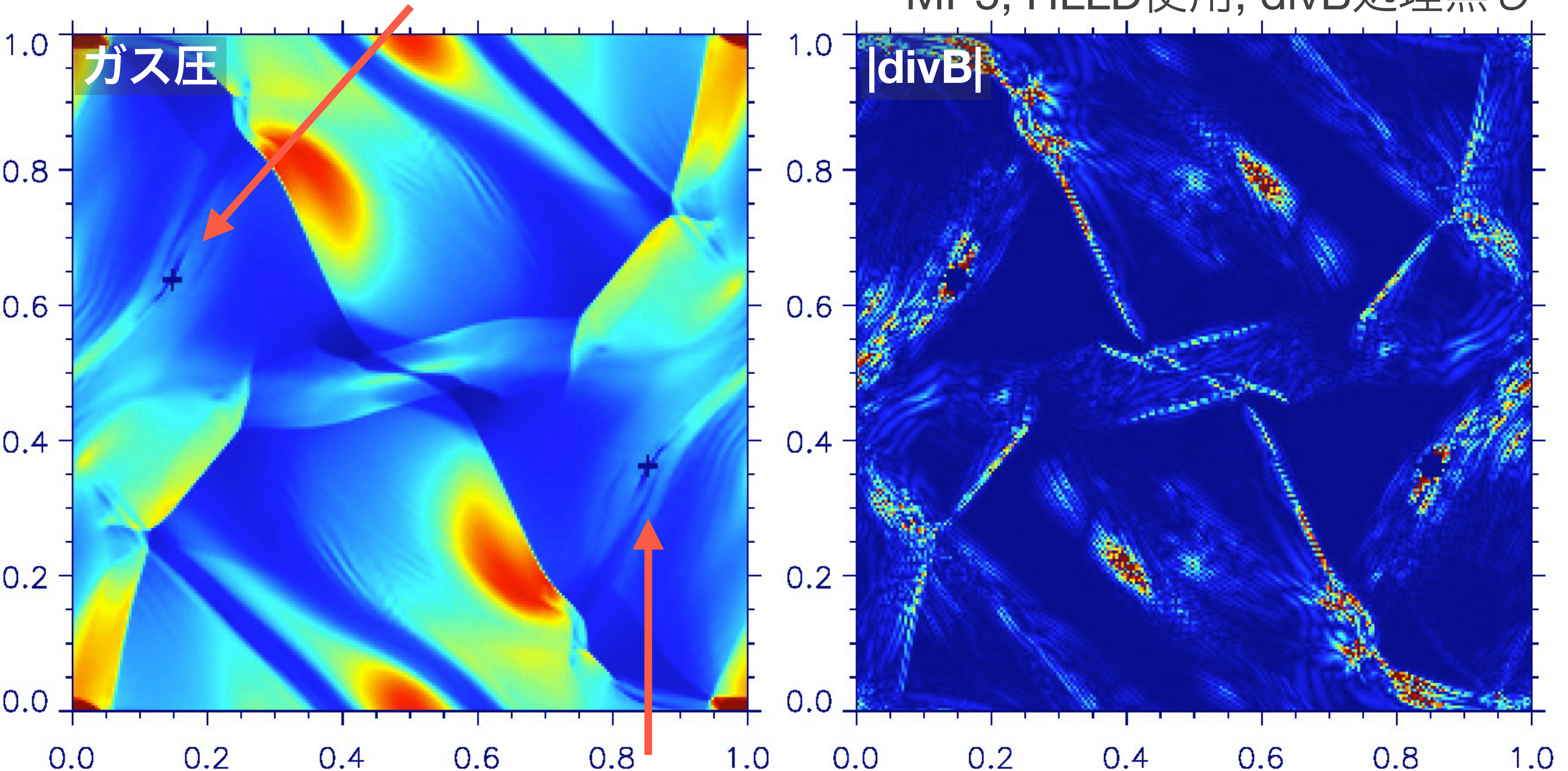
$$U^L_{i,j+1/2} = \mathrm{MP5}\left(U_{i,j-2}, U_{i,j-1}, U_{i,j}, U_{i,j+1}, U_{i,j+2}\right)$$

MP5の場合

1次元リーマンソルバ・空間補間スキームを利用

Orszag-Tang渦問題

MP5, HLLD使用, divB処理無し



数値スキームにより生成されたdivBがたまり続け、計算が壊れた。

MHDシミュレーションと磁場の拘束条件

- 磁場の拘束条件（ソレノイダル条件）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

- 運動方程式の保存形

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{V}) + \nabla \cdot \left[\rho \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{V} + \left(p + \frac{B^2}{2} \right) \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B} \right] = 0$$

- 運動方程式の非保存形（∇・Bがゼロでない場合）

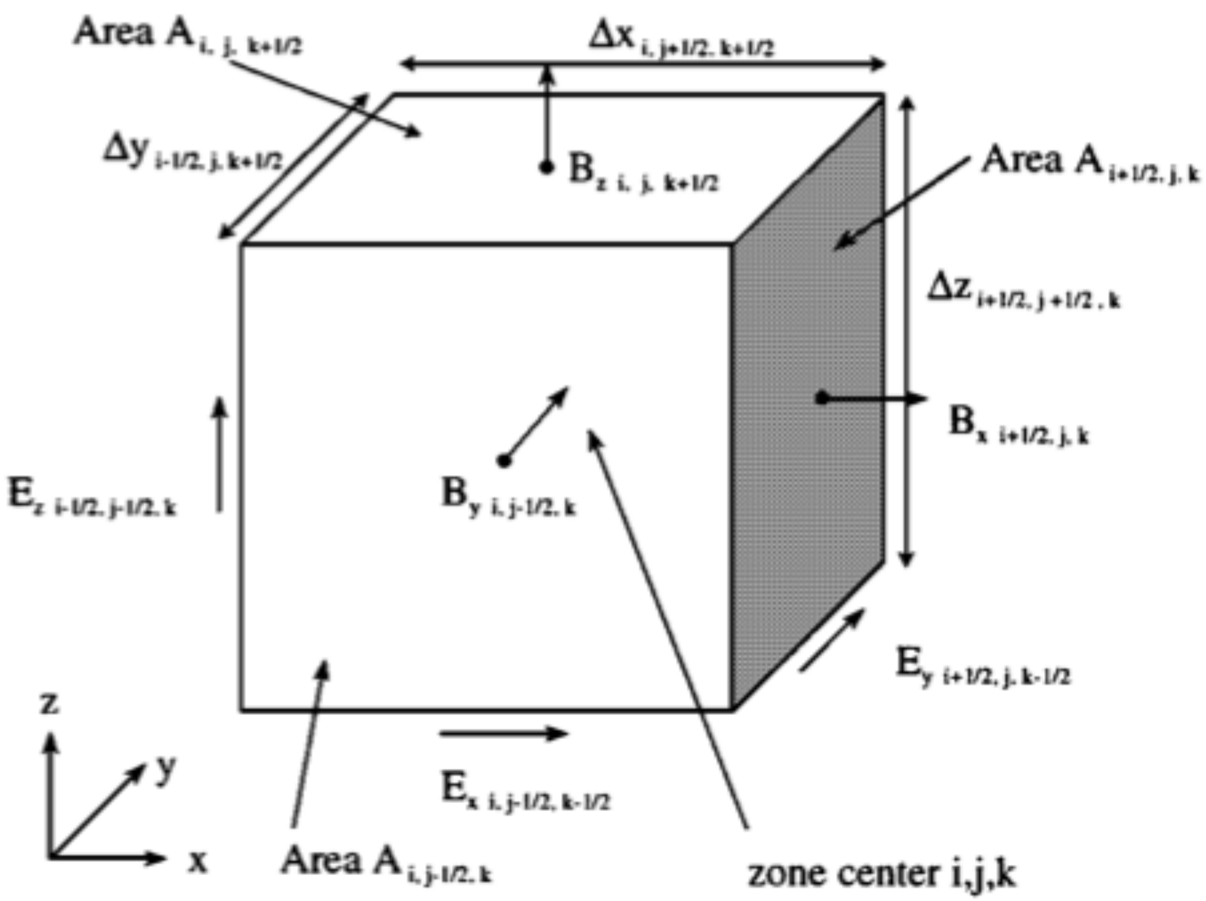
$$\rho \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\nabla p + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + \boxed{\boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})}$$

- 物理的な解を得るために拘束条件を満たす必要。

磁場発散の処理

- **divBを生まない離散化手法**
    - **Constrained Transport法** (CT法; Evans & Hawley, 1988):
      磁場を特殊なスタッガード格子上に配置
    - Central Difference法 (CD法; Toth et al., 2000):
      数値フラックスをセル中心で評価・中央差分
- **生まれたdivBを除去する手法**
    - プロジェクション法 (Brackbill & Barnes, 1980):
      ポアソン方程式を解いて磁場のモノポールを除去
    - **移流拡散法** (Powel et al., 1999; Dedner, 2002):
      磁場の発散を移流拡散方程式や電信方程式を用いて除去

Constrained Transport法（CT法）



Balsara & Spicer (1999)

磁場はセル境界面、

電場はセルエッジで定義。

Stokesの定理から磁場を時間発展。

磁場の発散は常にゼロ。

$$B^{n+1}_{x,\,i+1/2,\,j,k} = B^{n}_{x,\,i+1/2,\,j,k} - \frac{\Delta t}{A_{i+1/2,\,j,k}} \begin{pmatrix} \Delta z_{i+1/2,\,j+1/2,k} E^{n+1/2}_{z,\,i+1/2,\,j+1/2,k} \\ -\Delta z_{i+1/2,\,j-1/2,k} E^{n+1/2}_{z,\,i+1/2,\,j-1/2,k} \\ +\Delta y_{i+1/2,\,j,k-1/2} E^{n+1/2}_{y,\,i+1/2,\,j,k-1/2} \\ -\Delta y_{i+1/2,\,j,k+1/2} E^{n+1/2}_{y,\,i+1/2,\,j,k+1/2} \end{pmatrix}$$

$$B^{n+1}_{y,\,i,\,j-1/2,k} = B^{n}_{y,\,i,\,j-1/2,k} - \frac{\Delta t}{A_{i,\,j-1/2,k}} \begin{pmatrix} \Delta x_{i,\,j-1/2,k+1/2} E^{n+1/2}_{x,\,i,\,j-1/2,k+1/2} \\ -\Delta x_{i,\,j-1/2,k-1/2} E^{n+1/2}_{x,\,i,\,j-1/2,k-1/2} \\ +\Delta z_{i-1/2,\,j-1/2,k} E^{n+1/2}_{z,\,i-1/2,\,j-1/2,k} \\ -\Delta z_{i+1/2,\,j-1/2,k} E^{n+1/2}_{z,\,i+1/2,\,j-1/2,k} \end{pmatrix}$$

$$B^{n+1}_{z,\,i,\,j,k+1/2} = B^{n}_{z,\,i,\,j,k+1/2} - \frac{\Delta t}{A_{i,\,j,k+1/2}} \begin{pmatrix} \Delta x_{i,\,j-1/2,k+1/2} E^{n+1/2}_{x,\,i,\,j-1/2,k+1/2} \\ -\Delta x_{i,\,j+1/2,k+1/2} E^{n+1/2}_{x,\,i,\,j+1/2,k+1/2} \\ +\Delta y_{i+1/2,\,j,k+1/2} E^{n+1/2}_{y,\,i+1/2,\,j,k+1/2} \\ -\Delta y_{i-1/2,\,j,k+1/2} E^{n+1/2}_{y,\,i-1/2,\,j,k+1/2} \end{pmatrix}$$

どのようにセルエッジの

電場を決定するかが課題。

Londrillo & Del Zanna (2000, 2004)
Balsara (2004, 2009, 2013)

移流拡散法

9-wave法 (Dedner, 2002)

divBを除去するため誘導方程式を修正

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} + \nabla \psi = 0, \ \ \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{1}{\tau}\psi$$

divBについて整理すると電信方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_h^2 \Delta + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = 0$$

位相速度c_hで伝搬しつつ、
時間スケールτで減衰。

実装しやすく計算負荷も小さい。

移流拡散法

9-wave法 (Dedner, 2002)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_h^2 \Delta + \cancel{\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t}}\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = 0$$

位相速度c_hの
波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \cancel{c_h^2 \Delta} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = 0$$

時間スケールτで
指数関数的減衰

$$\left(\cancel{\frac{\partial^2}{\partial t^2}} - c_h^2 \Delta + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = 0$$

拡散係数τc_h^2の
拡散方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_h^2 \Delta + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = 0$$

(a) 減衰項付き波動方程式
(b) 相対論的拡散方程式

9-wave法の解き方(1/2)

x方向の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}B_x\\ \psi\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\psi\\ c_h^2 B_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\psi/\tau\end{pmatrix}$$

演算子分離

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}B_x\\ \psi\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\psi\\ c_h^2 B_x\end{pmatrix}=0 \rightarrow$$ 次スライドへ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=-\frac{\psi}{\tau} \rightarrow \begin{aligned}\psi^{n+1}&=\exp(-\Delta t/\tau)\psi^n\\ &\equiv c_d\psi^n\end{aligned}$$

c_hはCFLが許す最大速度（e.g., CFL×min(⊿x, ⊿y, ⊿z)/⊿t）、τは$0<c_d<1$となるように決定。

9-wave法の解き方(2/2)

ソース項を演算子分割した方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \psi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} = 0$$

-> MHD方程式に**固有値 ±c_h の2つの波**が加わった形（9-wave）

セル境界における**数値フラックス**は以下のように求められる。

$$\psi_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\psi^L_{i+1/2} + \psi^R_{i+1/2}\right) + \frac{c_h}{2}\left(B^L_{x,i+1/2} - B^R_{x,i+1/2}\right)$$

$$\left(c_h^2 B_x\right)_{i+1/2} = \frac{c_h^2}{2}\left(B^L_{x,i+1/2} + B^R_{x,i+1/2}\right) + \frac{c_h}{2}\left(\psi^L_{i+1/2} - \psi^R_{i+1/2}\right)$$

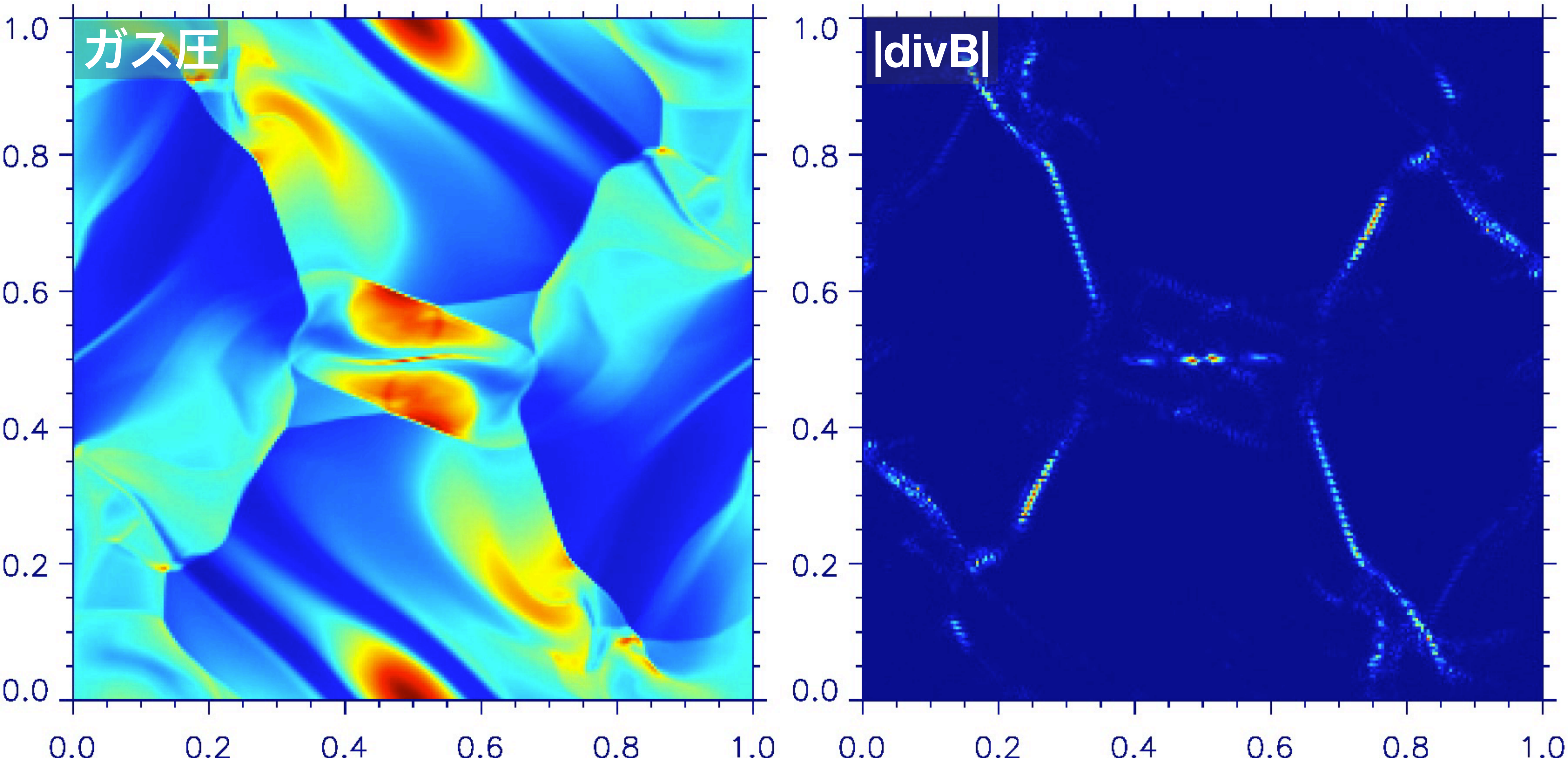
実装は簡単で計算量負荷も小さいが、多少磁場が拡散的な傾向。

divBを厳密にゼロにするわけではないので、

プラズマベータの低い領域ではその誤差が問題になる場合がある。

Orszag-Tang渦問題

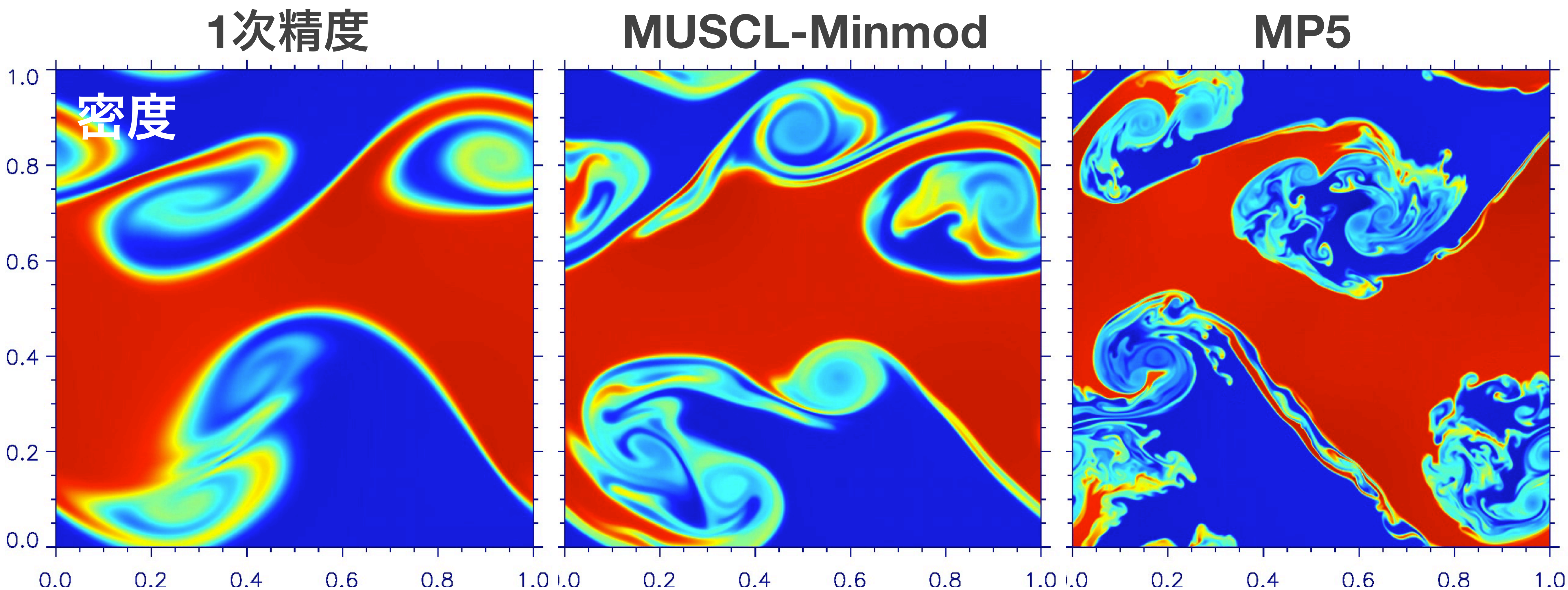
MP5, HLLD使用, 9-wave法



divBは衝撃波付近で生成され続けるが、

不連続面から離れるとすぐに移流・減衰され、誤差が蓄積しない。

ケルビン・ヘルムホルツ不安定 | 補間スキーム依存性



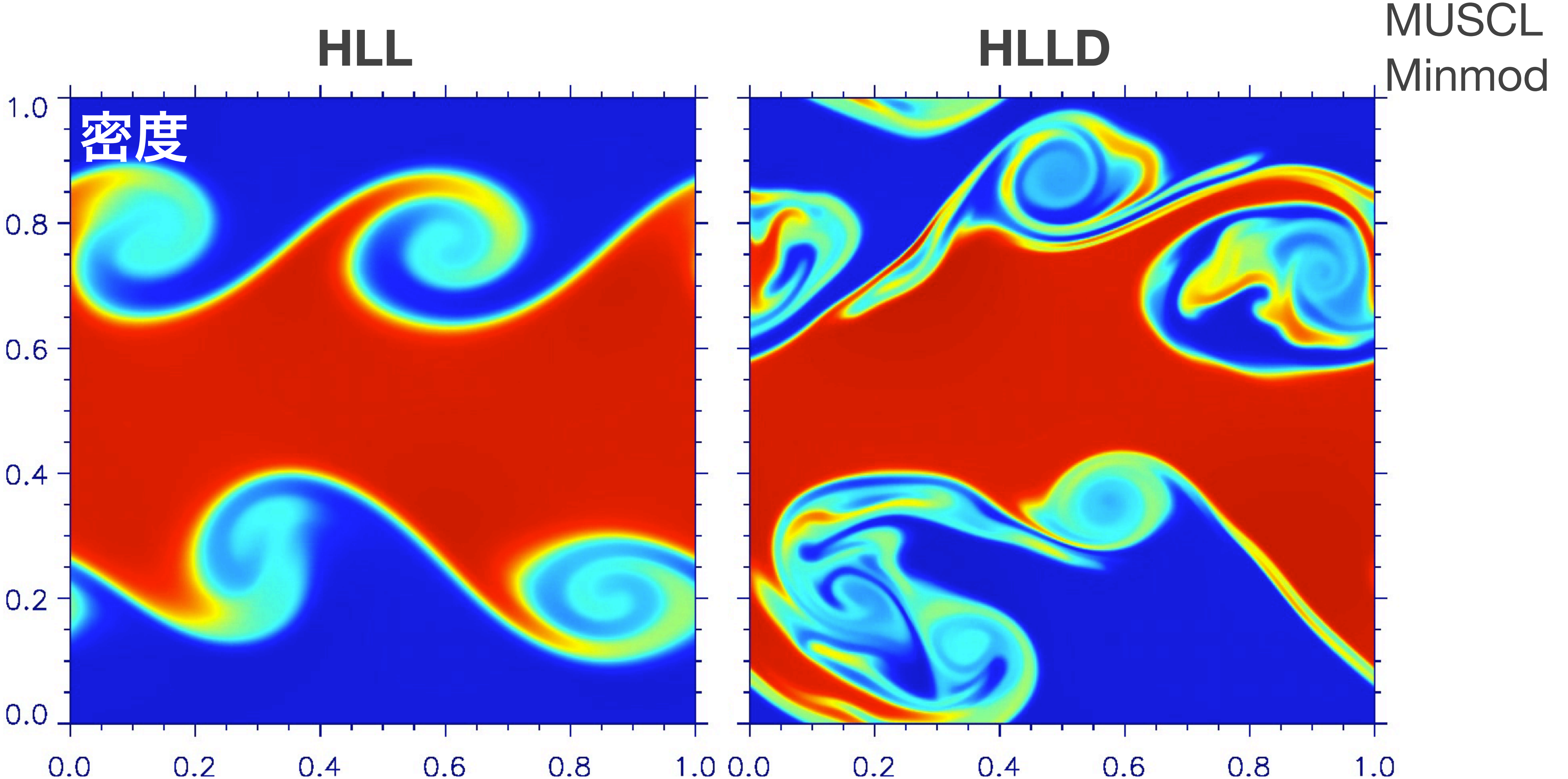
全てHLLDを使用

各層毎に速度差がある流体の間で生じる不安定。

高解像度スキームほど高波数がよく成長する。

接触不連続を分解出来るHLLDスキームを利用。

ケルビン・ヘルムホルツ不安定 | リーマンソルバ依存性

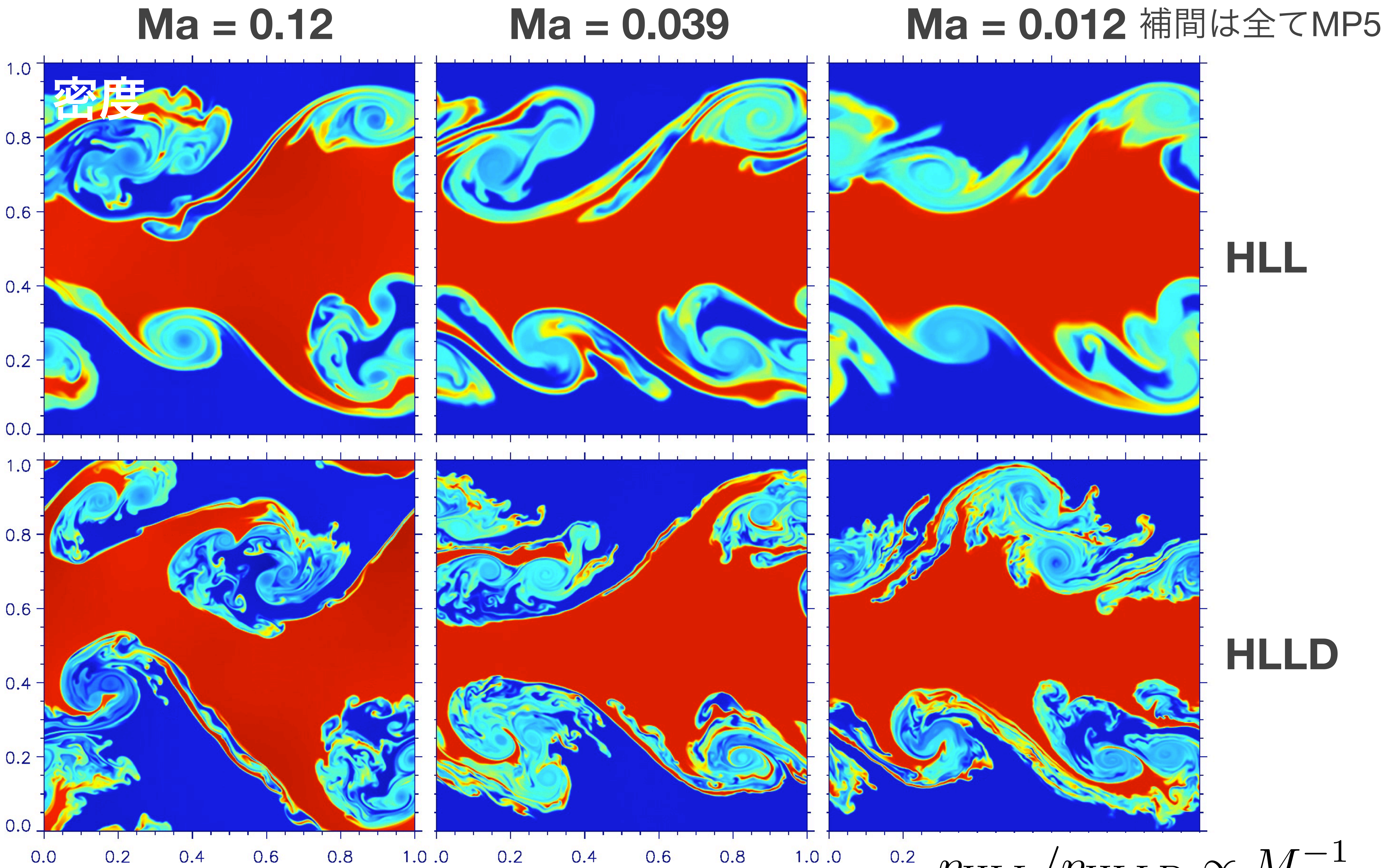


HLLは接触不連続を分解出来ないため、**低マッハ数のKH不安定の解像度は低い。**

$$\eta_{\mathrm{HLL}} \sim \frac{1}{2}\left(|V| + c_f\right) \Delta x \sim \frac{1}{2} c_s \Delta x$$

$$\eta_{\mathrm{HLLD}} \sim \frac{1}{2}|V|\Delta x \sim \frac{V}{c_s}\eta_{\mathrm{HLL}} \sim \mathrm{Ma} \cdot \eta_{\mathrm{HLL}}$$

ケルビン・ヘルムホルツ不安定 | マッハ数依存性



$$\eta_{\mathrm{HLL}}/\eta_{\mathrm{HLLD}} \propto M_a^{-1}$$

まとめ

- 実用的・効率的なMHDシミュレーションのためには
  高次精度化・多次元化が必須！
- **高次精度化**
  - 衝撃波等の不連続面を取り扱う**非線形補間**
    （e.g., MUSCL, WENO, MP5）
  - **特性量変換**の効果（高解像度なスキームほど顕著）
  - **リーマンソルバ**も計算結果の解像度に大きく影響
- **多次元化**
  - **1次元補間手法の利用**（dimension-by-dimension, unsplit）
  - **磁場発散**の処理（9-wave法、CT法）