差分法の基礎

三好　隆博

広島大学大学院理学研究科

内容

- はじめに
- 差分法
- 移流方程式の差分法
- 高次精度風上差分法

はじめに

はじめに

- 微分方程式
  - 未知関数とその導関数を含む方程式
  - 自然現象などを記述する基礎方程式

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = F(r,t),\ V(t) = R(I)I + L(I)\frac{dI}{dt},\ \frac{dX}{dt} = \mu(X,t) + \sigma(X,t)\frac{dB}{dt},$$

$$\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon},\ i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi + V(r)\Psi,\ \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \end{cases},\ \cdots$$

はじめに

- 物理によくでる偏微分方程式

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+D\frac{\partial f}{\partial x}+E\frac{\partial f}{\partial y}+F=0$$

楕円型:

$B^2-4AC<0$　　$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\rho$（ポアソン方程式）

放物型:

$B^2-4AC=0$　　$\frac{\partial f}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$（拡散方程式）

双曲型:

$B^2-4AC>0$　　$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$（波動方程式）

はじめに

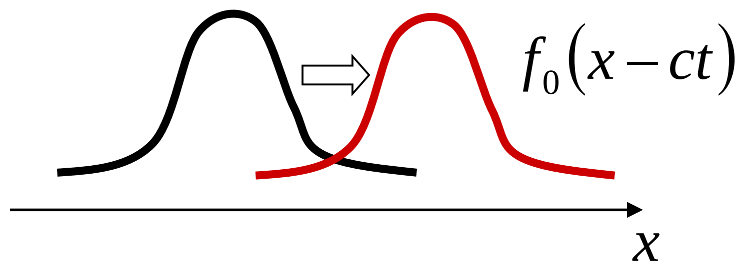
- 双曲型方程式
  - 線形移流方程式
  - 非粘性Burgers方程式
  - Maxwell方程式
  - Euler方程式
  - 理想MHD方程式

微分方程式を**計算機**で解きたい！

はじめに

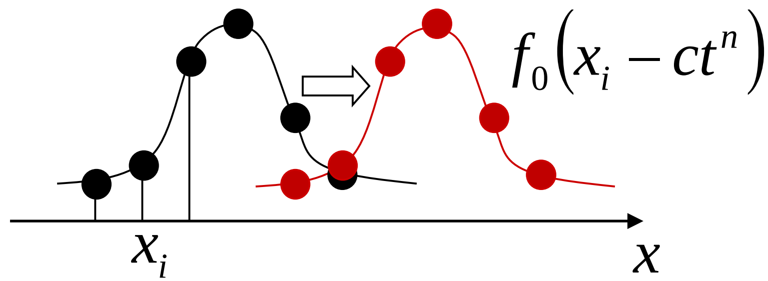
- 微分方程式の世界

無限と連続の世界



- 計算機の世界

有限の0と1の世界



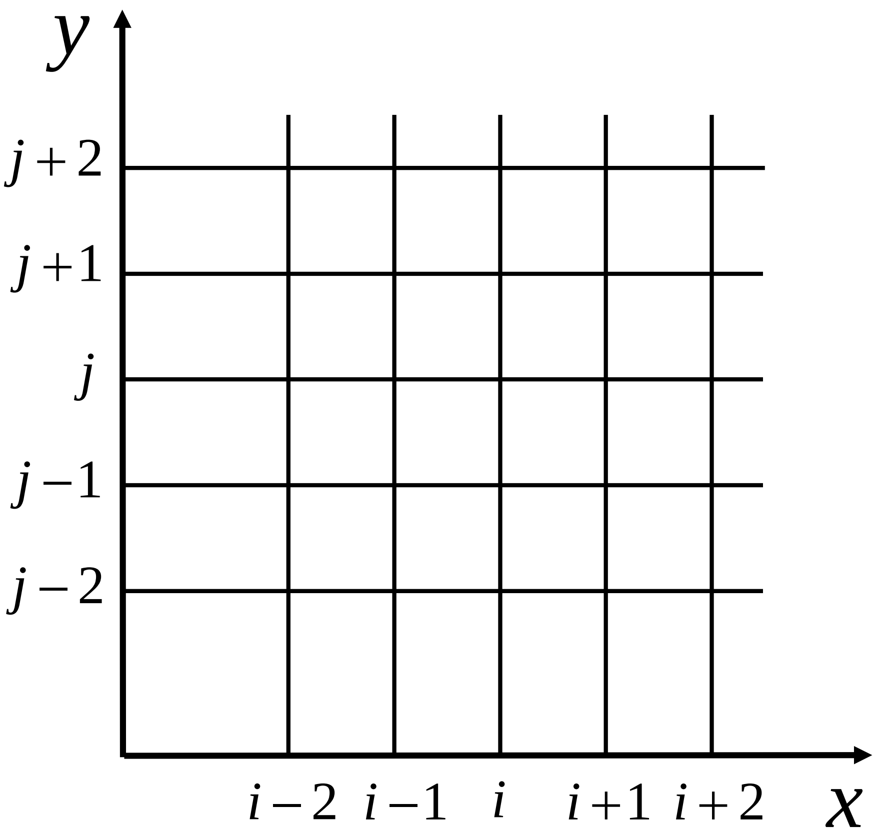
- 連続場の離散化
  - 空間　：$x_0, x_1, ..$
  - 時間　：$t^0, t^1, ..$
  - 実数値：0.1, 0.2, ..

```
program main
   implicit none
   real(8) :: a
   a = 0.1    ; write(*,*) a
   a = 0.1d0; write(*,*) a
end program main
```

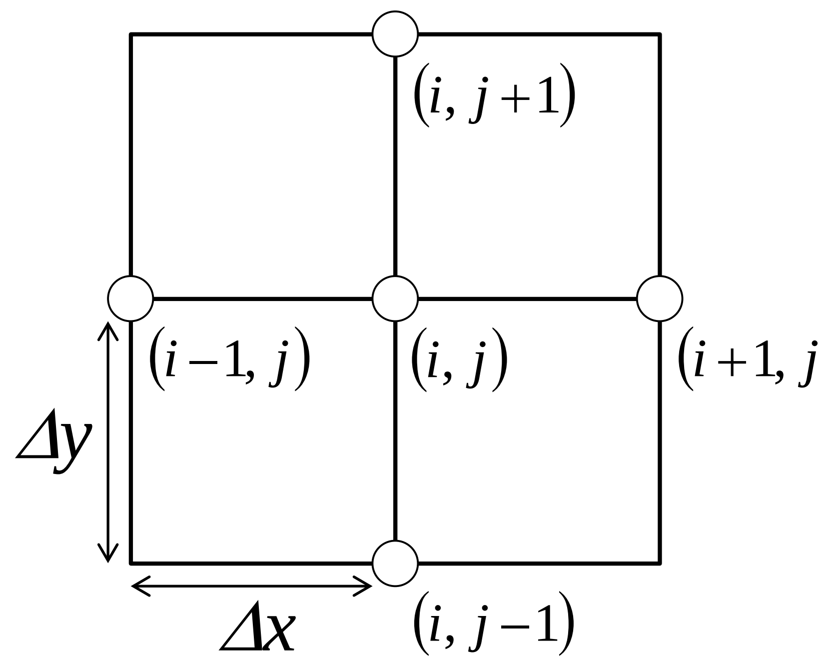
```
$ ./a.out
0.100000001490116
0.100000000000000
```

はじめに

□ 座標および変数の離散表記法

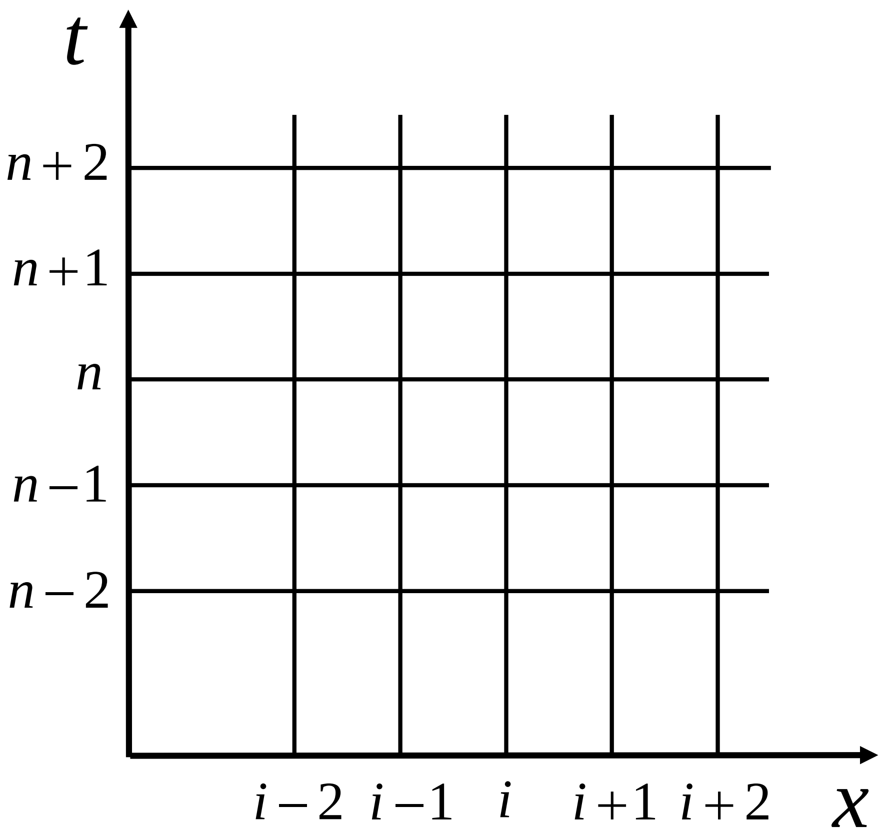


$$x_i\ ,y_j\ ,u_{i,j}=u\left(x_i\ ,y_j\ \right)$$

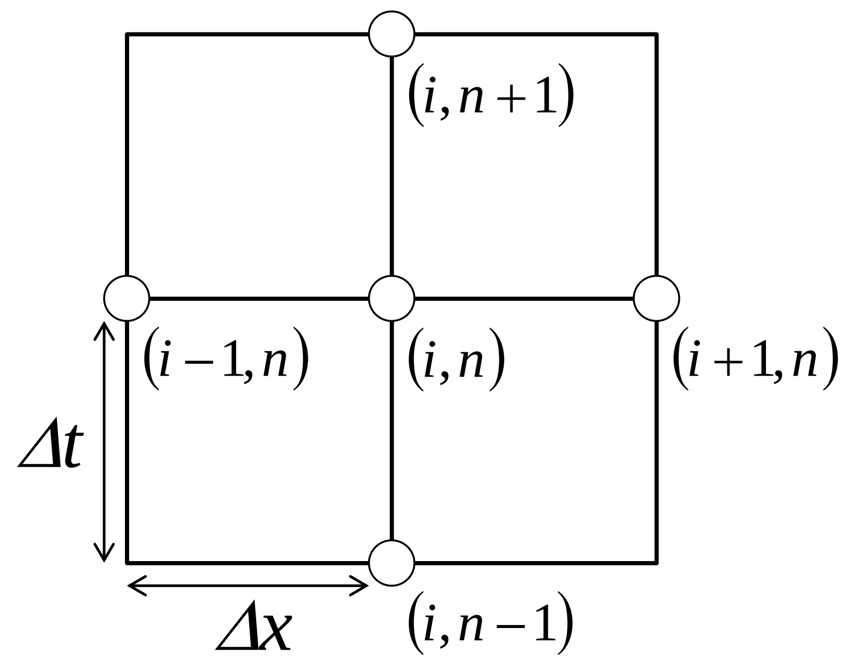


はじめに

□ 時間･空間座標および変数の離散表記法



$$x_i\,,t^n,u_i^n = u\left(x_i\,,t^n\right)$$



差分法

差分法

微分法

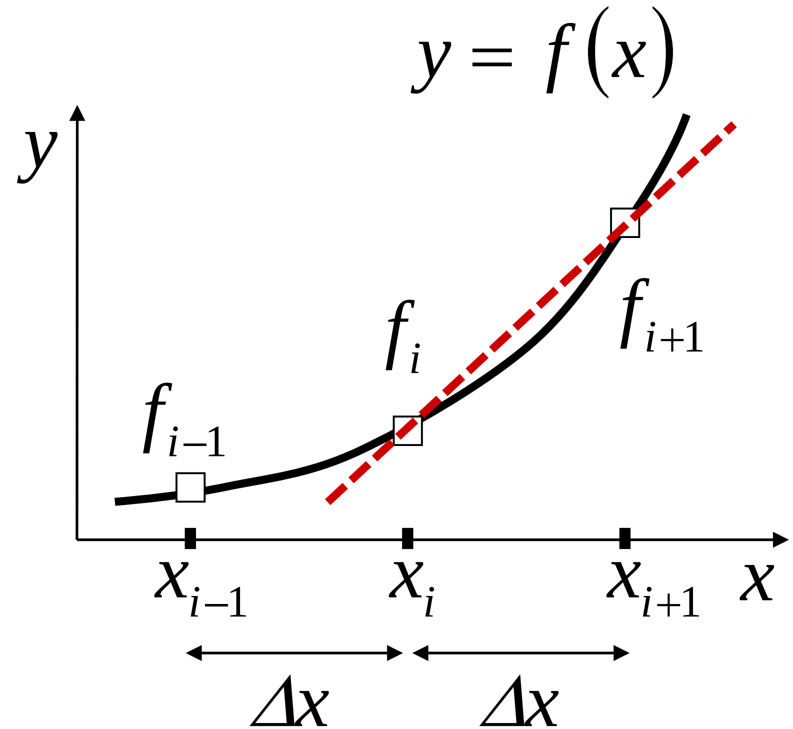
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

差分法

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f(x_i+\Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

ただし、$x_{i+1} \equiv x_i + \Delta x$



前進差分 という 以上

差分法

前進差分の誤差

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

Taylor展開

$$= \frac{1}{\Delta x}\left(f(x_i) + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \cdots - f(x_i) \right)$$

$$= \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i - \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = O(\Delta x)$$

誤差がΔxの1次に比例

差分法

中心差分

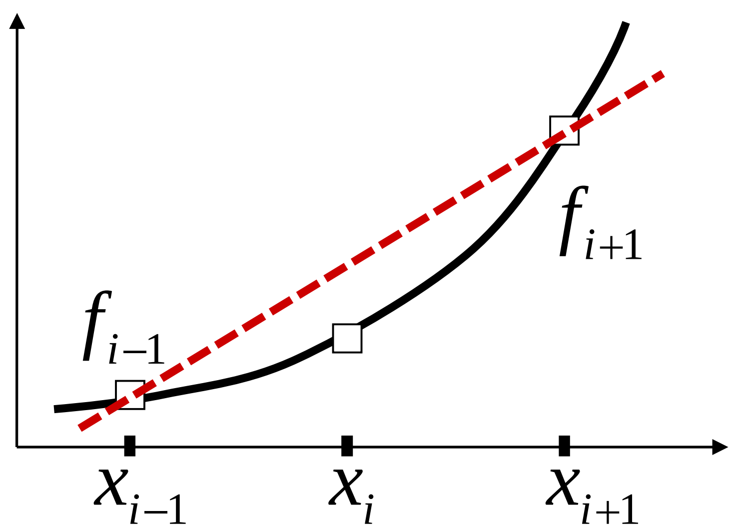
$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \cdots$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

誤差がΔxの2次に比例



差分法

1階差分法のまとめ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \qquad \text{（1次後退差分）}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \qquad \text{（1次前進差分）}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \qquad \text{（2次中心差分）}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2\Delta x} \qquad \text{（2次後退差分）}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} \qquad \text{（4次中心差分）}$$

差分法

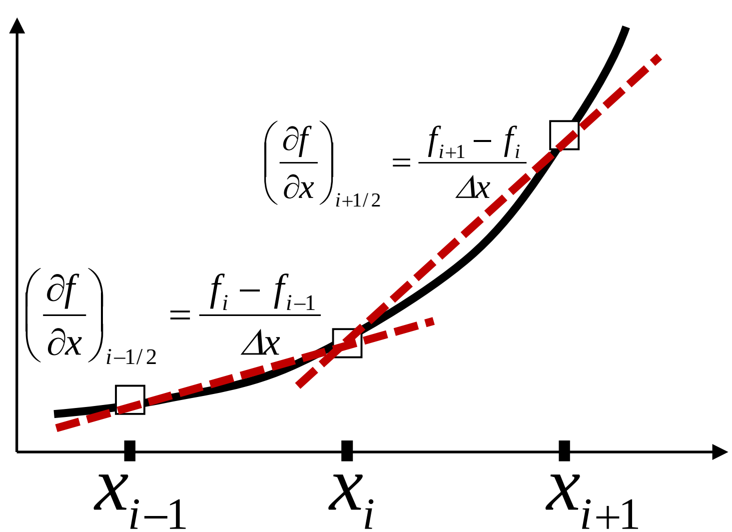
二階中心差分

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \cdots$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^4)$$

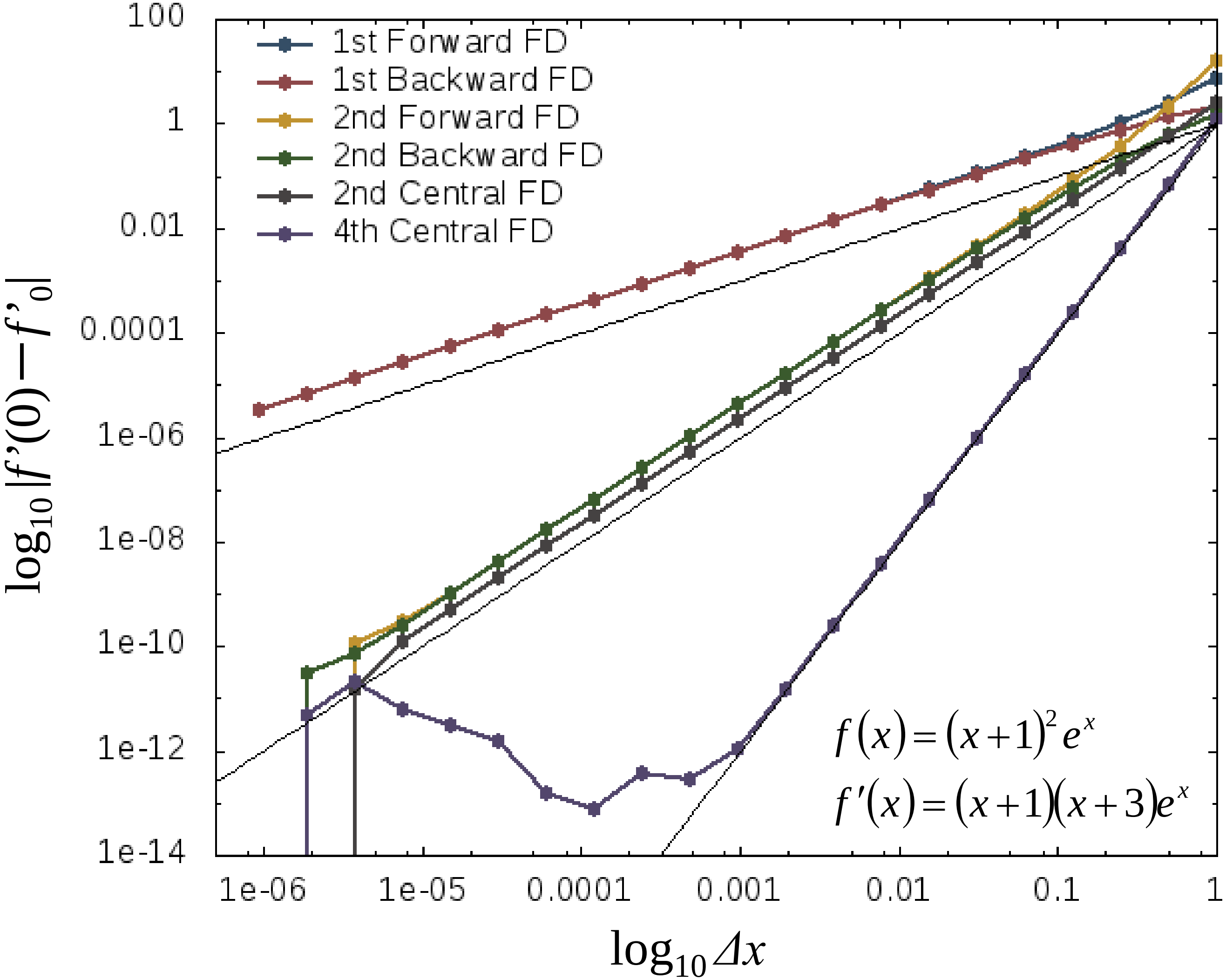
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$



誤差がΔxの2次に比例

差分法

□ 誤差の比較



100
1
0.01
0.0001
1e-06
1e-08
1e-10
1e-12
1e-14
1e-06
1e-05
0.0001
0.001
0.01
0.1
1
1st Forward FD
1st Backward FD
2nd Forward FD
2nd Backward FD
2nd Central FD
4th Central FD
$\log_{10}|f'(0)-f'_0|$
$\log_{10}\Delta x$
$f(x)=(x+1)^2e^x$
$f'(x)=(x+1)(x+3)e^x$

移流方程式の
差分法

移流方程式の差分法

線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ a = \text{const.} > 0$$

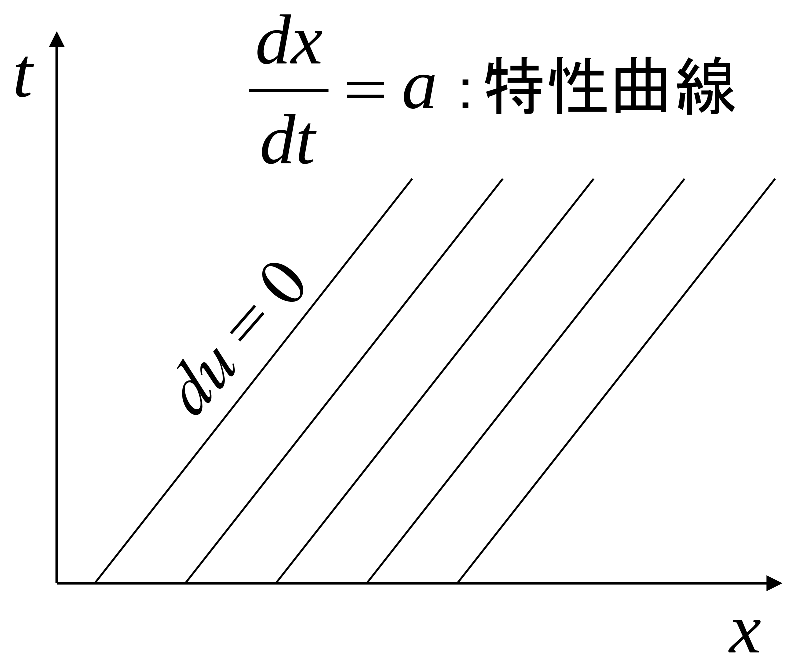
ここで、$a \equiv dx/dt$ とすると、

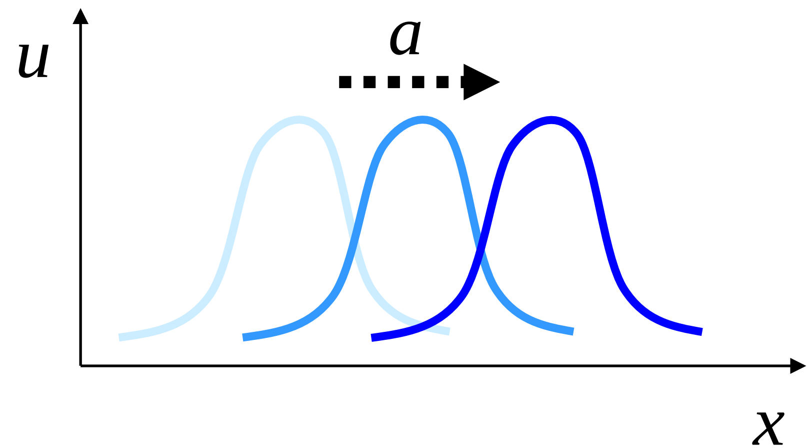
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} = 0,\quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dx}{dt} = a$ に沿って $du = 0$

移流方程式の差分法

□ 線形移流方程式





$$u(x,t) = u(x - at, 0)$$

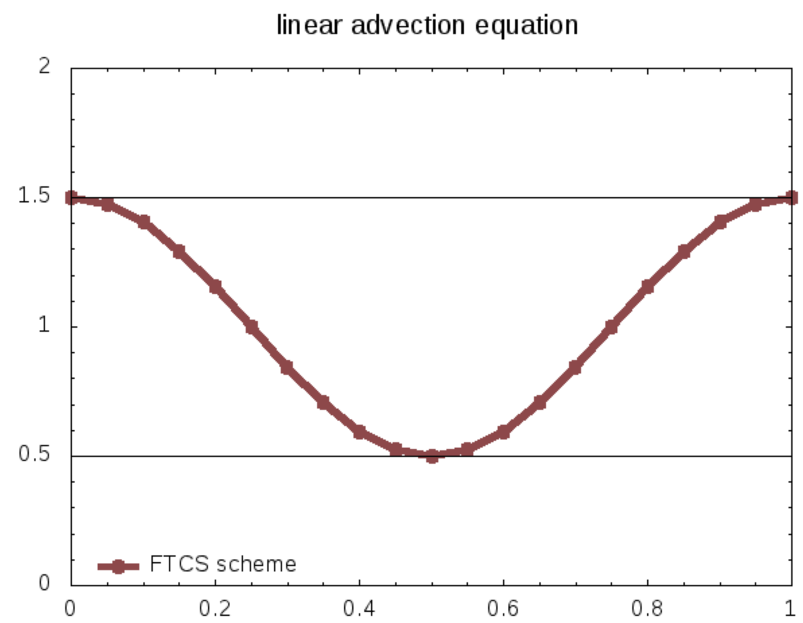
移流方程式の差分法

- FTCS（Forward-Time Centered-Space）法
  - 時間微分：前進差分
  - 空間微分：中心差分

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

$$\Rightarrow u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n\right)$$

$\nu \equiv a\Delta t/\Delta x$：Courant数



$(\nu = 0.5)$

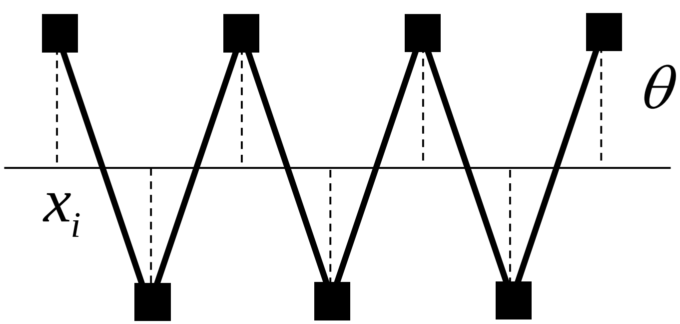
振幅が単調に増大！

移流方程式の差分法

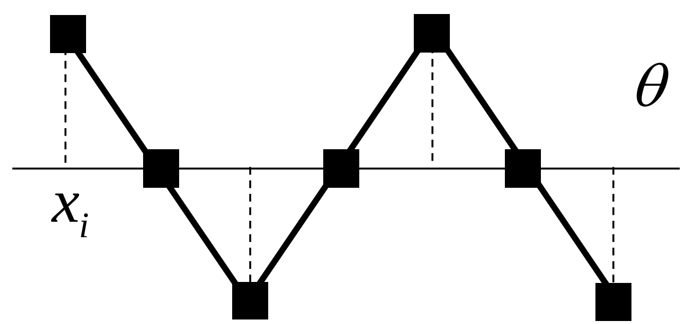
- von Neumannの安定性解析
  - 厳密解の時間発展

$$u_i^n = e^{\Im \kappa x_i} \qquad \Im : \text{虚数単位} \qquad \kappa : \text{波数}$$

$$= e^{\Im \kappa (i \Delta x)} = e^{\Im \theta i}, \ \theta \equiv \kappa \Delta x$$



$\theta = \pi$



$\theta = \pi/2$

移流方程式の差分法

- von Neumannの安定性解析
  - 厳密解の時間発展

$$u_i^n = e^{\Im \kappa x_i} \qquad \Im：虚数単位 \qquad \kappa：波数$$

$$= e^{\Im \kappa (i\Delta x)} = e^{\Im \theta i}, \quad \theta \equiv \kappa \Delta x$$

$$u_i^{n+1} \equiv g u_i^n = g e^{\Im \theta i} \qquad g：増幅率$$

$$= e^{\Im (\kappa x_i - a\Delta t)} = e^{\Im \theta (i - \nu)}$$

$$\Rightarrow \quad g \equiv |g| e^{\Im \varphi} = e^{-\Im \theta \nu}$$

$$\therefore \quad |g|_{exact} = 1, \; \varphi_{exact} = -\theta \nu$$

移流方程式の差分法

- von Neumannの安定性解析
  - FTCS法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

$$ge^{\Im\theta i} = e^{\Im\theta i} - \frac{\nu}{2}\left(e^{\Im\theta(i+1)} - e^{\Im\theta(i-1)}\right)$$

$$= e^{\Im\theta i}\left(1 - \Im\nu\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad g = 1 - \Im\nu\sin\theta$$

$$\therefore \quad |g| = \sqrt{1+\nu^2\sin^2\theta} > 1, \; \varphi = -\tan^{-1}\left(\nu\sin\theta\right)$$

- 無条件不安定

移流方程式の差分法

- Lax法（Lax-Friedrichs法）

$$\frac{u_i^{n+1} - \dfrac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

移流方程式の差分法

Lax-Wendroff法

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n + O\left(\Delta t^3\right)$$

$$= u_i^n - a\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{a^2\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O\left(\Delta t^3\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= u_i^n - a\Delta t\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{a^2\Delta t^2}{2}\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2, \Delta t^3\right)$$

$$\Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- 2次中心差分 → 2次後退差分: Warming-Beam法

移流方程式の差分法

風上差分法

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=0\ ,\quad a>0$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}=0\ ,\quad a<0$$

$$\Rightarrow\ u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\nu+|\nu|}{2}\left(u_i^n-u_{i-1}^n\right)-\frac{\nu-|\nu|}{2}\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right)$$

移流方程式の差分法

- von Neumanの安定性解析
  - Lax法

$$|g|=\sqrt{\cos^2\theta+\nu^2\sin^2\theta},\ \varphi=-\tan^{-1}(\nu\tan\theta)$$

  - Lax-Wendroff法

$$|g|=\sqrt{\left(1-\nu^2(1-\cos\theta)\right)^2+\nu^2\sin^2\theta},\ \varphi=-\tan^{-1}\left(\frac{\nu\sin\theta}{1-\nu^2(1-\cos\theta)}\right)$$

  - 風上差分法

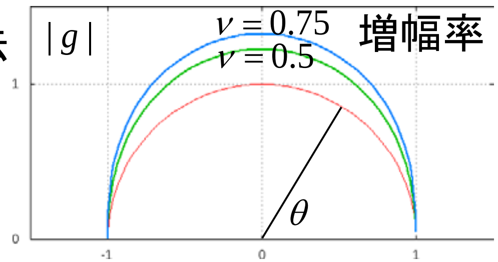
$$|g|=\sqrt{1-2\nu(1-\nu)(1-\cos\theta)},\ \varphi=-\tan^{-1}\left(\frac{\nu\sin\theta}{1-\nu(1-\cos\theta)}\right)$$

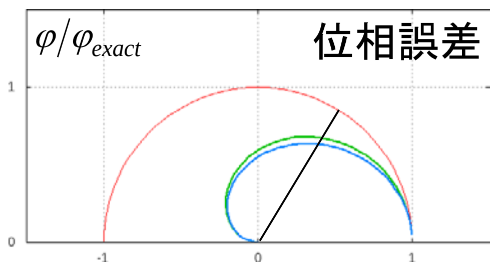
- 条件付き安定　$\nu = a\Delta t/\Delta x<1$

移流方程式の差分法

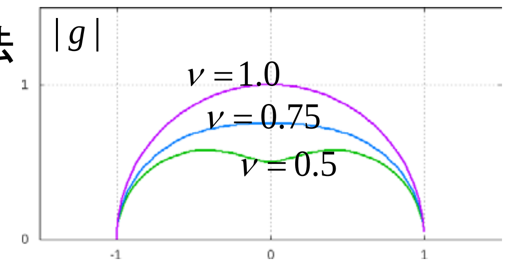
von Neumannの安定性解析

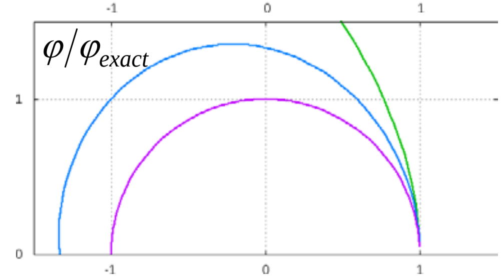
FTCS法



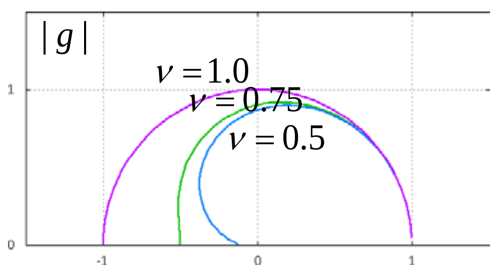


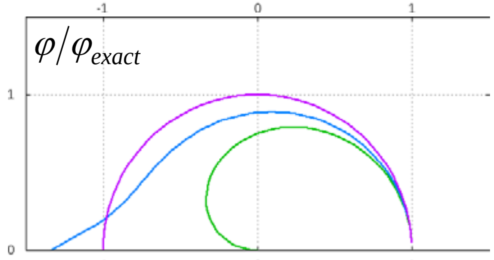
Lax法



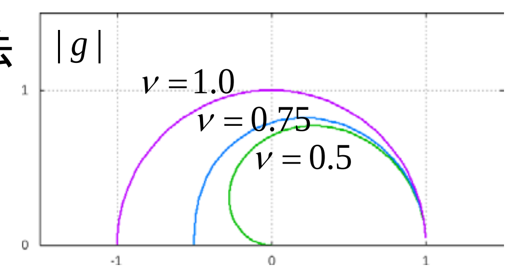


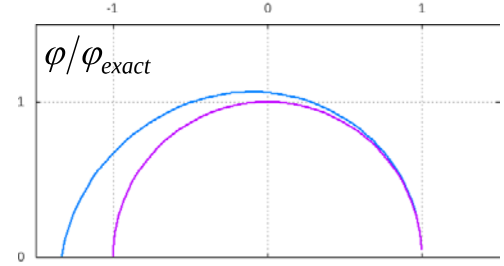
Lax-Wendroff法





風上差分法

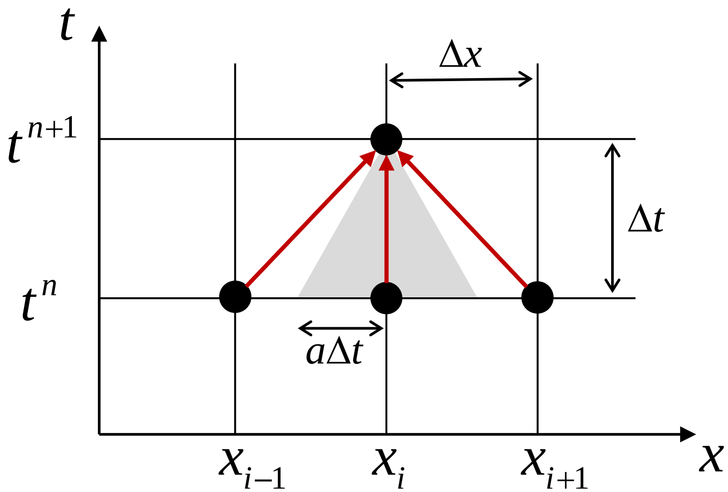




移流方程式の差分法

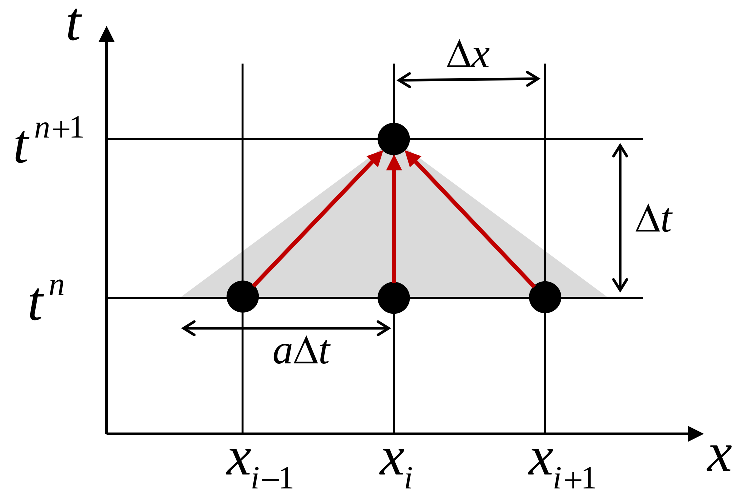
CFL（Courant-Friedrichs-Lewy）条件

$$\nu < 1 \;\Rightarrow\; a\Delta t < \Delta x$$



差分法は因果律と整合

$$\nu > 1 \;\Rightarrow\; a\Delta t > \Delta x$$



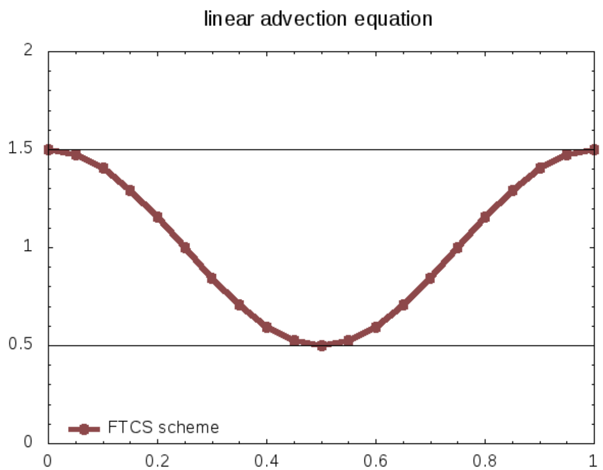
差分法は因果律を破綻

⇒ 数値的不安定・発散

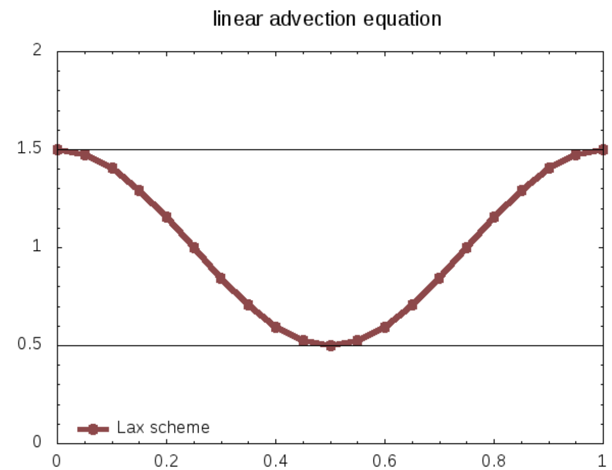
移流方程式の差分法

□ 数値実験（cos関数）

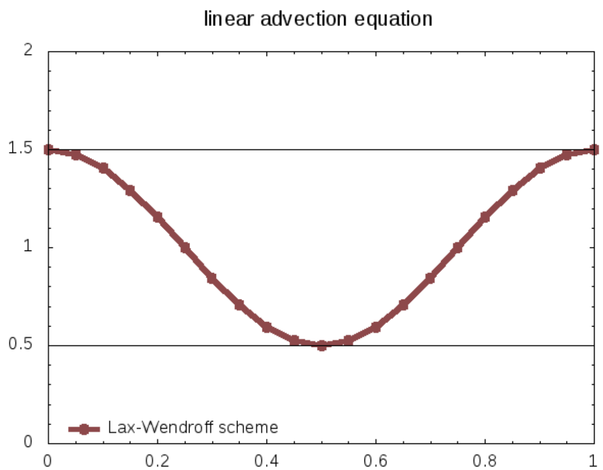
$$(\nu = 0.5)$$



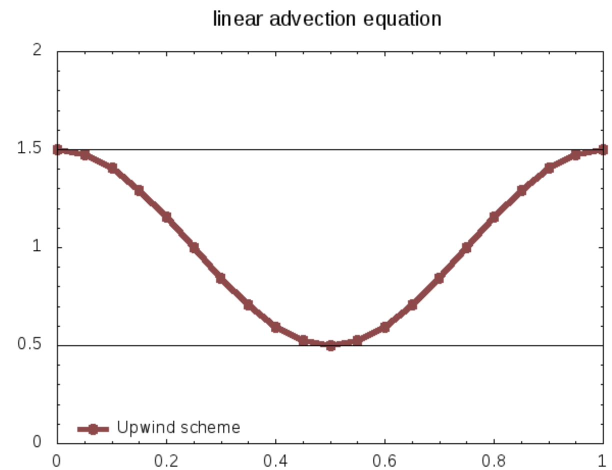
FTCS法



Lax法



Lax-Wendroff法



風上差分法

移流方程式の差分法

FTCS法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

時間1次・空間2次

Lax法

$\nu < 1$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

時間1次・空間1次

∨

風上差分法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

時間1次・空間1次

∨

Lax-Wendroff法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

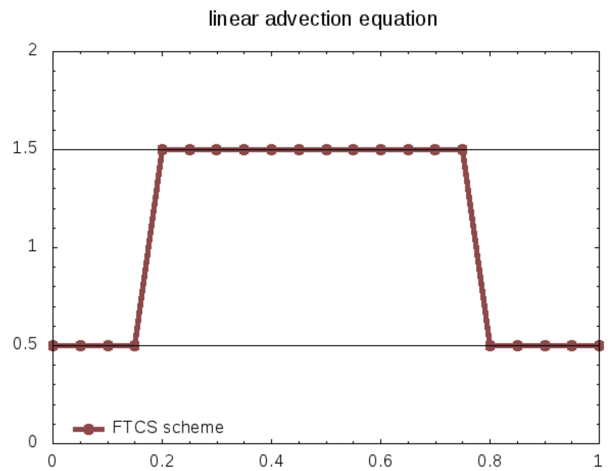
時間2次・空間2次

数値拡散項

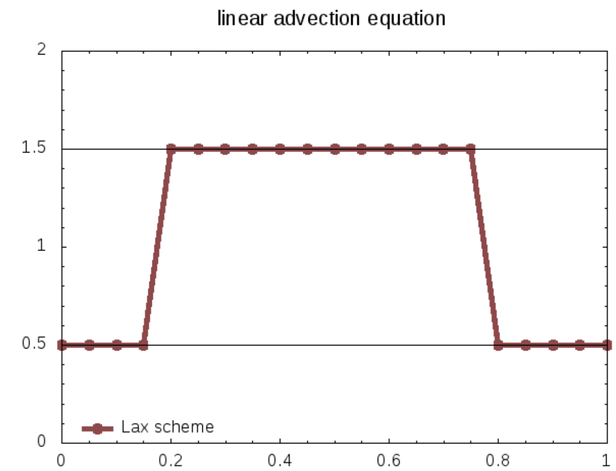
移流方程式の差分法

数値実験（階段関数）

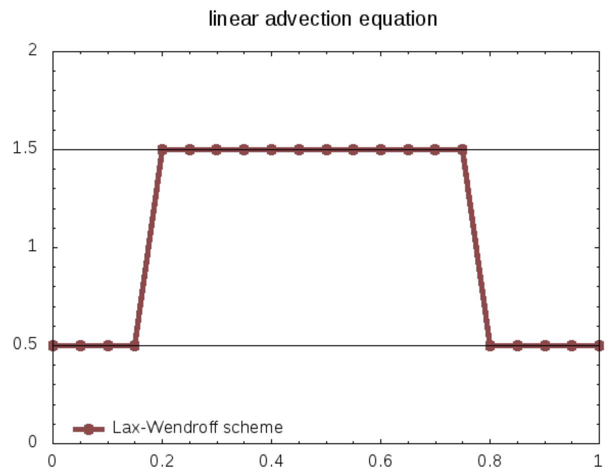
$(\nu = 0.5)$



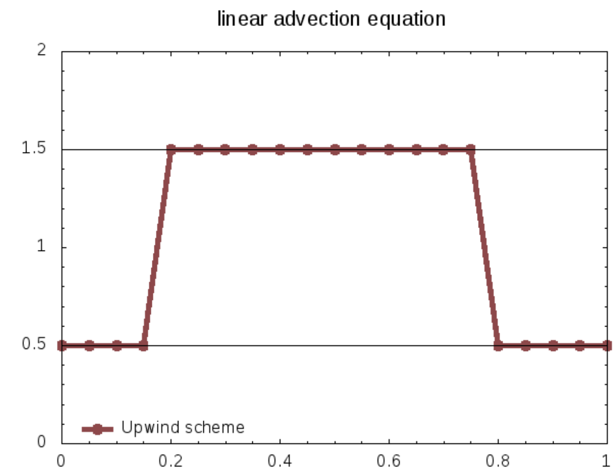
FTCS法



Lax法



Lax-Wendroff法

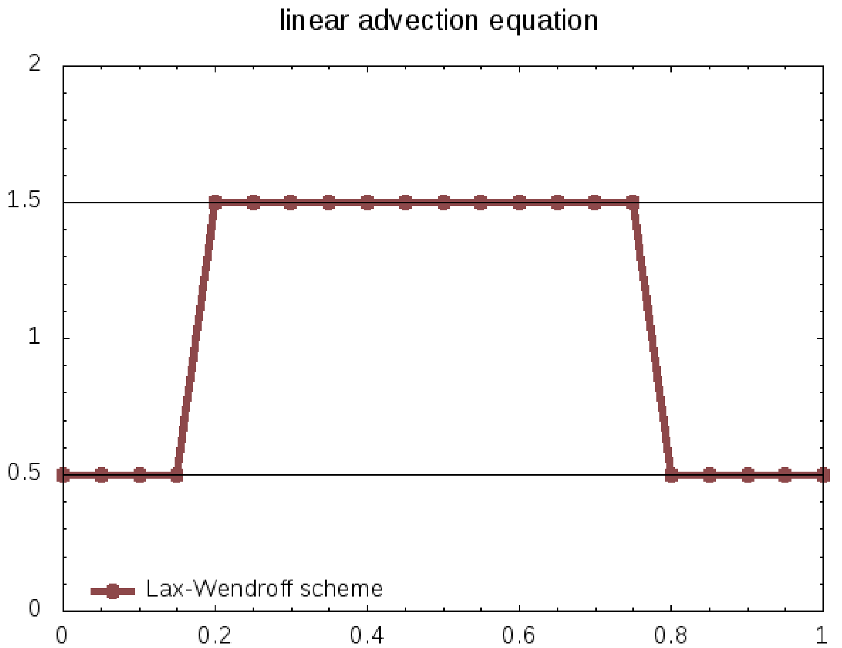


風上差分法

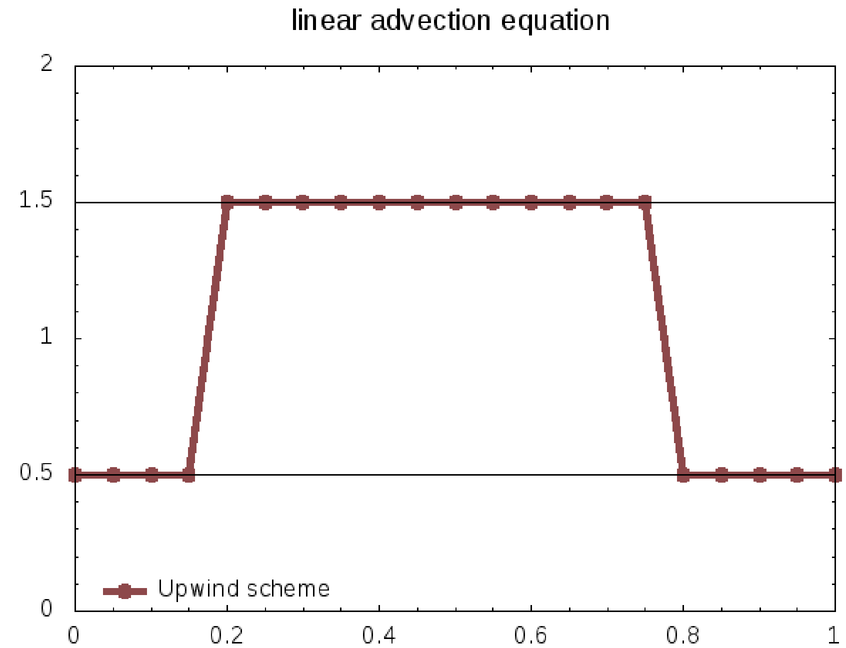
ちょっとまとめ

- 線形移流方程式に対する様々な差分法を導出した。
  - FTCS法
  - Lax法
  - Lax-Wendroff法
  - 風上差分法　など
- 各差分法にvon Neumannの安定性解析を行った。
  - CFL条件による条件付き安定
  - ただし、FTCS法は絶対不安定
- 数値実験の結果から･･･

ちょっとまとめ



Lax-Wendroff法



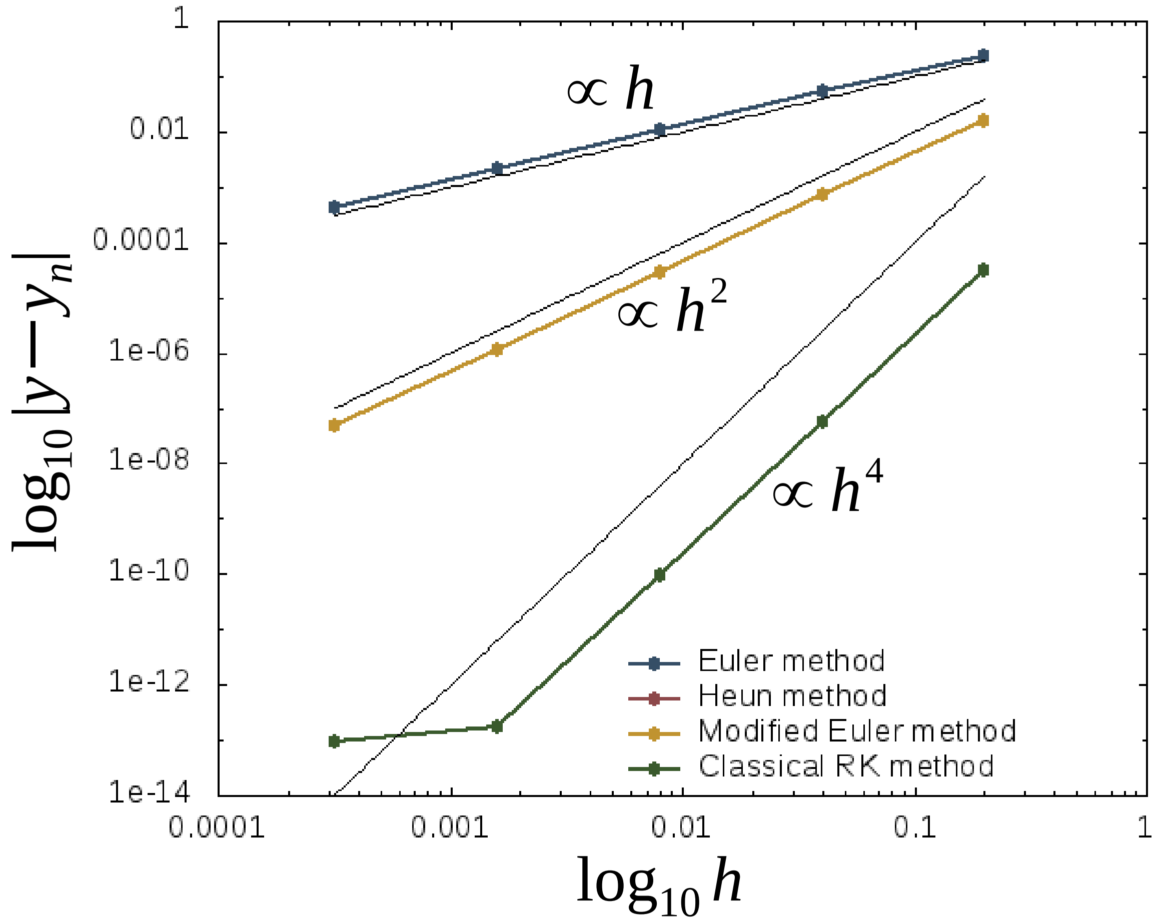
風上差分法

いいとこ取りしたい。

高次精度
風上差分法

高次精度風上差分法

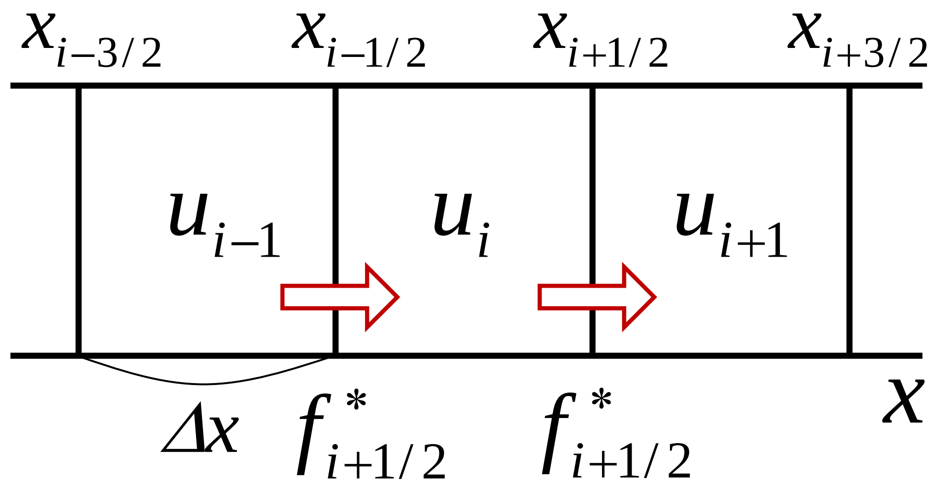
- 高次精度差分法へのいざない
  - （例）常微分方程式の誤差評価



高次精度風上差分法

□ 保存型差分法(有限体積法)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ f = au$$



$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx + f\left(x_{i+1/2}\right) - f\left(x_{i-1/2}\right) = 0$$

$$\Delta x \frac{\Delta u_i}{\Delta t} + f^*_{i+1/2} - f^*_{i-1/2} = 0$$

$f^*_{i+1/2}$: 数値流束

高次精度風上差分法

- FTCS法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

- Lax法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- 風上差分法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{|\nu|}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- Lax-Wendroff法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

高次精度風上差分法

- 保存型FTCS法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*\right), \quad f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2}\left(u_{i+1}^n + u_i^n\right)$$

- 保存型Lax法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*\right), \quad f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2}\left(u_{i+1}^n + u_i^n\right) - \frac{a}{2\nu}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$

- 保存型風上差分法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*\right), \quad f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2}\left(u_{i+1}^n + u_i^n\right) - \frac{|a|}{2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$

- 保存型Lax-Wendroff法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*\right), \quad f_{i+1/2}^* = \frac{a}{2}\left(u_{i+1}^n + u_i^n\right) - \frac{\nu a}{2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$

高次精度風上差分法

- Godunovの定理 [1959]

  移流方程式 $u_t + au_x = 0$ に対する2次またはそれ以上の高次精度のどのような線形スキームも解の単調性を維持できない

  - 線形スキーム

    $$u_i^{n+1} = \sum_k c_k u_{i+k}^n \qquad c_k : \text{const.}$$

    - 単調性を維持するためには全ての係数が非負
      ⇒ 単調スキーム＝「1次精度」の風上差分法

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = \sum_k c_k u_{i+1+k}^n - \sum_k c_k u_{i+k}^n = \sum_k c_k \left(u_{i+1+k}^n - u_{i+k}^n \right)$$

高次精度風上差分法

風上差分法

- 単調性を維持する線形スキーム（単調スキーム）

$$f^*_{i+1/2} = au_i$$

Lax-Wendroff法

- 空間3点、時間1点で最も高次な線形スキーム

$$f^*_{i+1/2} = a\left(u_i^n + \frac{1}{2}(1-\nu)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)\right)$$

非線形スキーム

- 風上差分法とLax-Wendroff法を非線形結合

$$f^*_{i+1/2} = a\left(u_i^n + \frac{1}{2}(1-\nu)\Phi_{i+1/2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)\right)$$

$\Phi_{i+1/2}$: 流束制限関数

高次精度風上差分法

- 全変動（Total Variation）

$$TV \equiv \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx$$

  - $u_t + u_x = 0$ の物理的な解の全変動は増加しない

- 離散系における全変動 [Harten, 1983]

$$TV^n \equiv \sum_i \left| u_{i+1}^n - u_i^n \right|$$

  - $TV^{n+1} \le TV^n$（TVD条件）を満足するスキーム
    - TVDスキーム

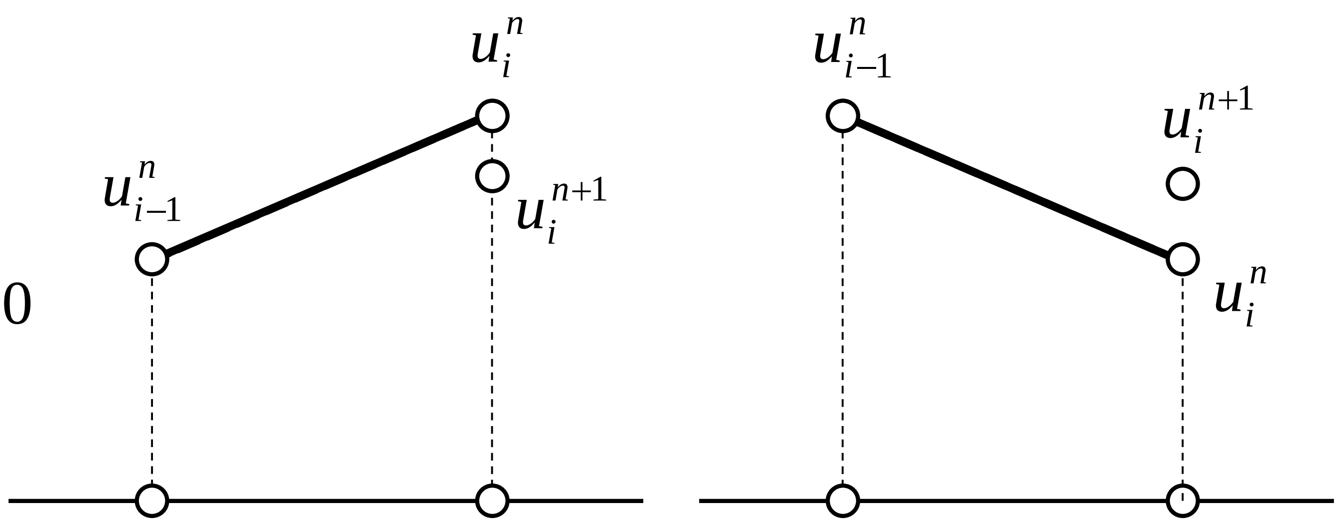
高次精度風上差分法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^{*} - f_{i+1/2}^{*}\right)$$ に代入

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_{i-1}^n - u_i^n} = \nu\left(1 - \frac{1}{2}(1-\nu)\Phi_{i-1/2}\right) + \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\frac{\Phi_{i+1/2}}{r_i}, \quad r_i \equiv \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}$$

$$0 \le \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_{i-1}^n - u_i^n} \le 1 \quad \Rightarrow \quad u_{i-1}^n \le u_i^{n+1} \le u_i^n \ \text{ or } \ u_{i-1}^n \ge u_i^{n+1} \ge u_i^n$$

$a > 0$



高次精度風上差分法

$$0 \le \nu\left(1-\frac{1}{2}(1-\nu)\Phi_{i-1/2}\right)+\frac{1}{2}\nu(1-\nu)\frac{\Phi_{i+1/2}}{r_i} \le 1$$

$$\Rightarrow \ -\frac{2}{\nu} \le \Phi_{i-1/2} - \frac{\Phi_{i+1/2}}{r_i} \le \frac{2}{1-\nu}$$

ここで十分条件について考えると、$0 \le \nu \le 1$なので、

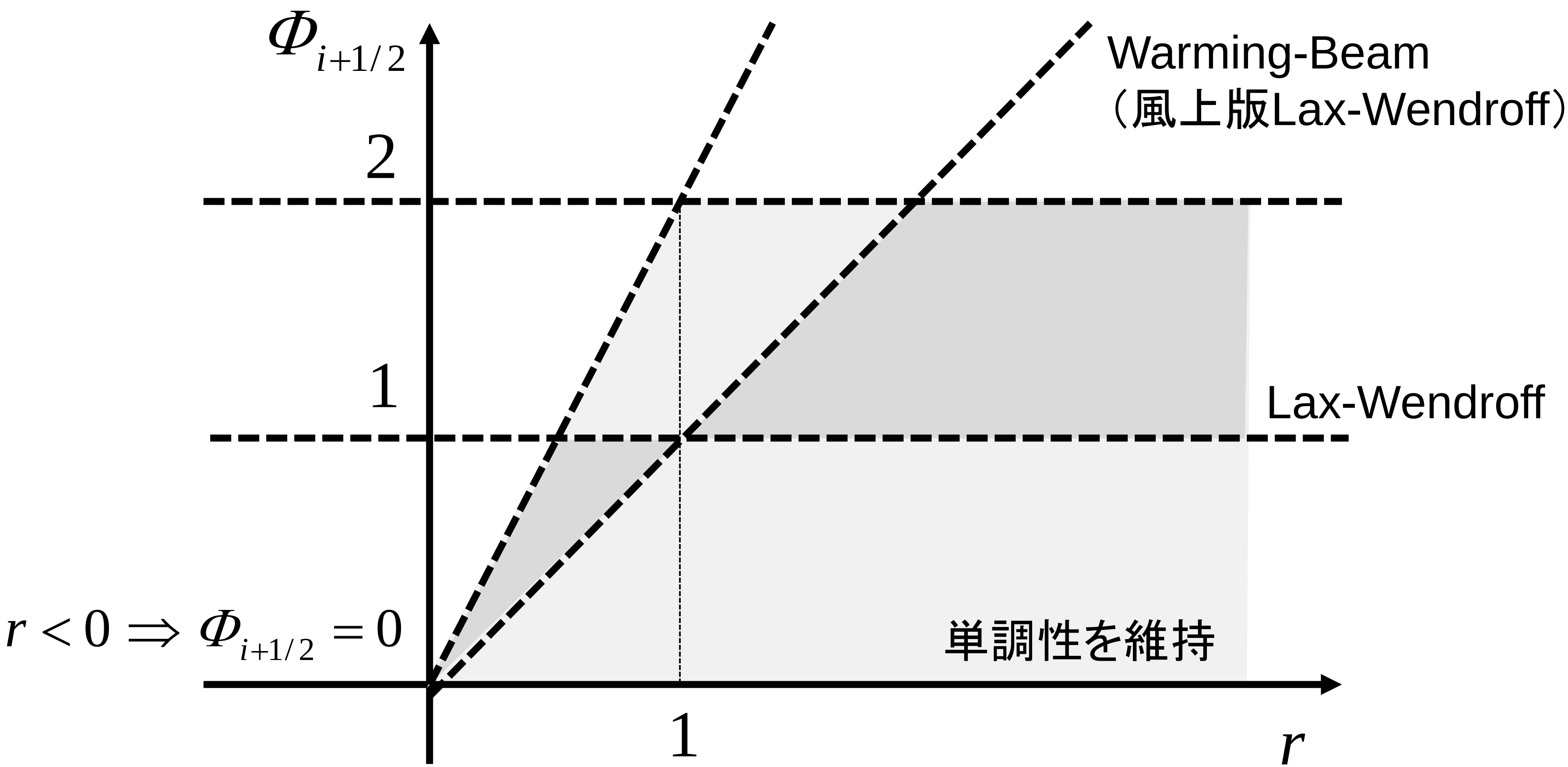
$$-2 \le \Phi_{i-1/2} - \frac{\Phi_{i+1/2}}{r_i} \le 2$$

で、これは、以下が満たされれば自動的に満足

$$0 \le \Phi_{i+1/2} \le 2,\ 0 \le \frac{\Phi_{i+1/2}}{r_i} \le 2$$

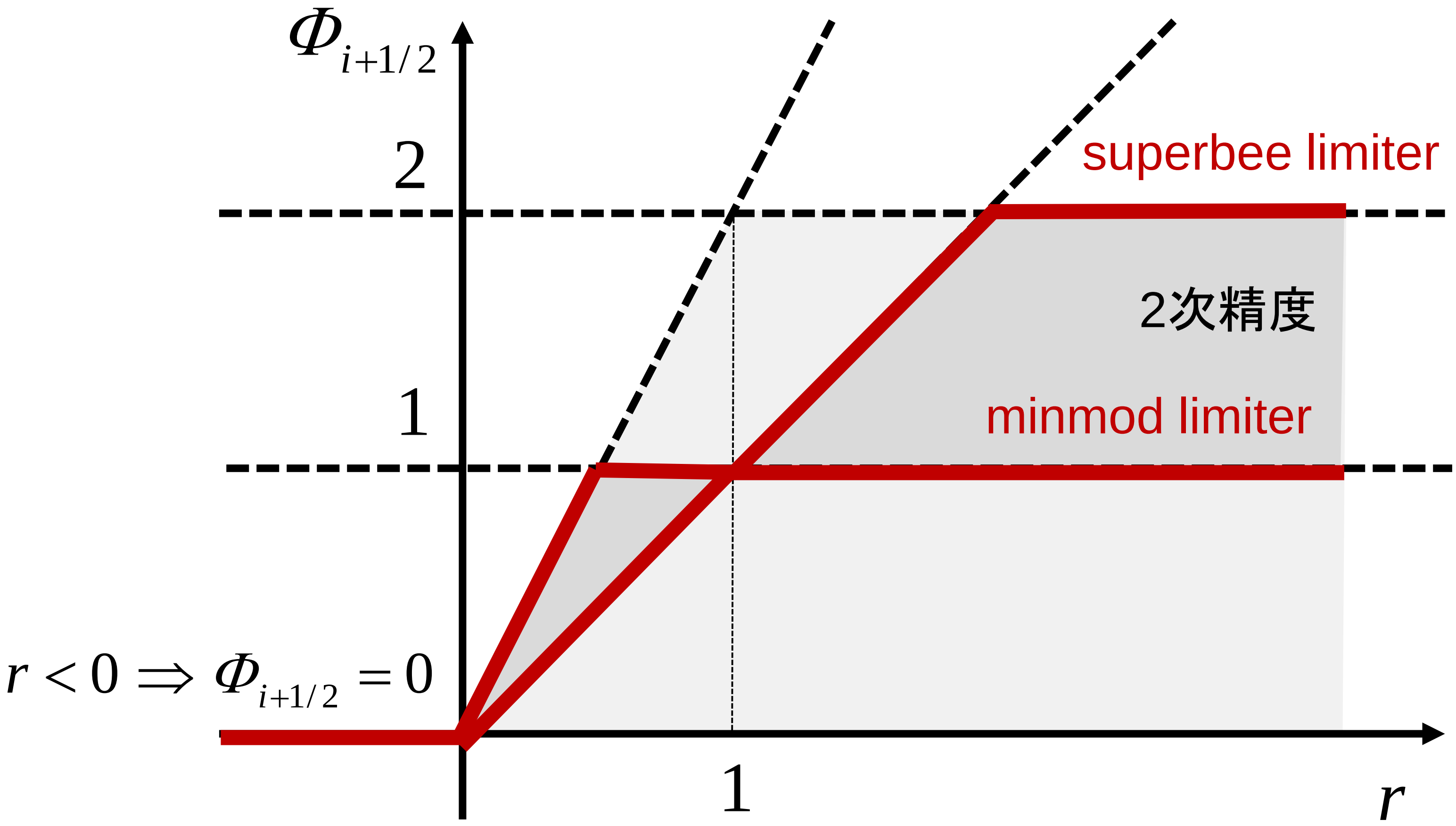
高次精度風上差分法

$$0 \leq \Phi_{i+1/2} \leq 2,\ 0 \leq \frac{\Phi_{i+1/2}}{r} \leq 2$$



高次精度風上差分法

$$0 \le \Phi_{i+1/2} \le 2,\ 0 \le \frac{\Phi_{i+1/2}}{r} \le 2$$



高次精度風上差分法

流束制限関数の例

minmod limiter:

$$\Phi(r) = \max(0, \min(1, r))$$

superbee limiter:

$$\Phi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$$

Koren limiter (3次精度):

$$\Phi(r) = \max(0, \min(2r, (2 + r)/3, 2))$$

van Leer limiter:

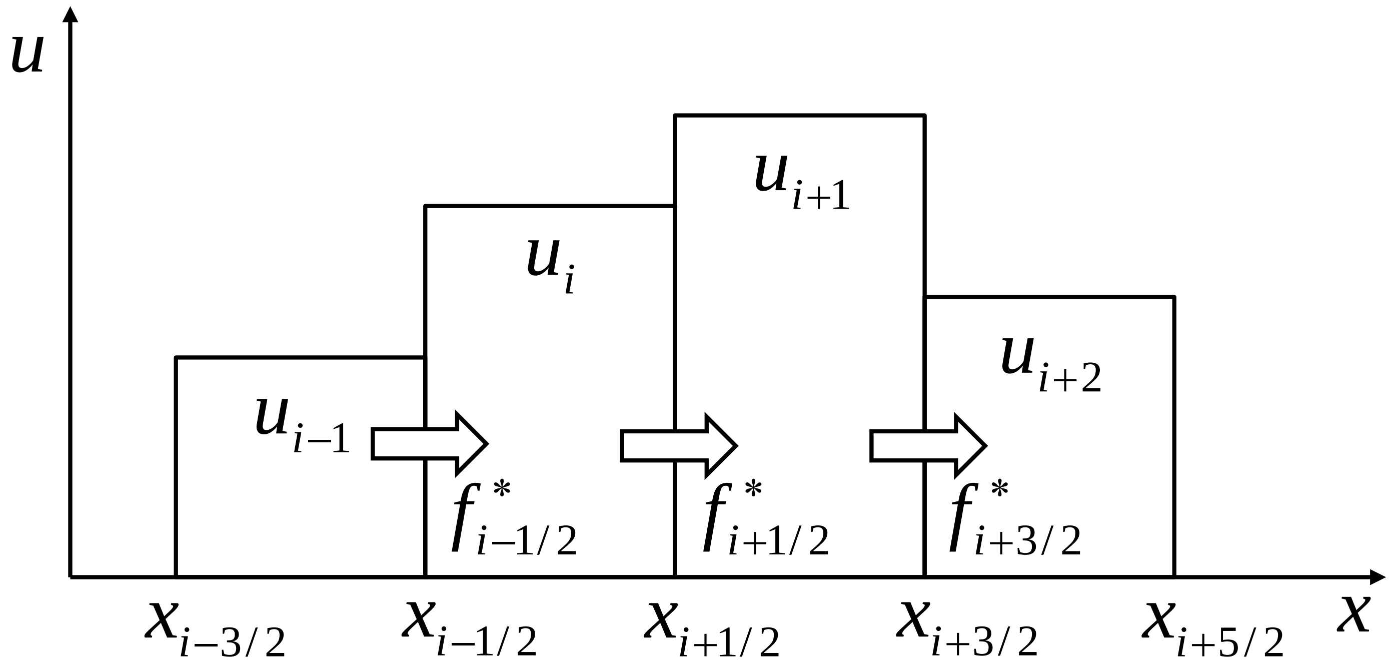
$$\Phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}$$

高次精度風上差分法

- MUSCL
  - Monotonic Upwstream-centered Schemes for Conservation Laws [van Leer, 1979]
  - 制限関数付き高次変数補間を用いた有限体積法

高次精度風上差分法

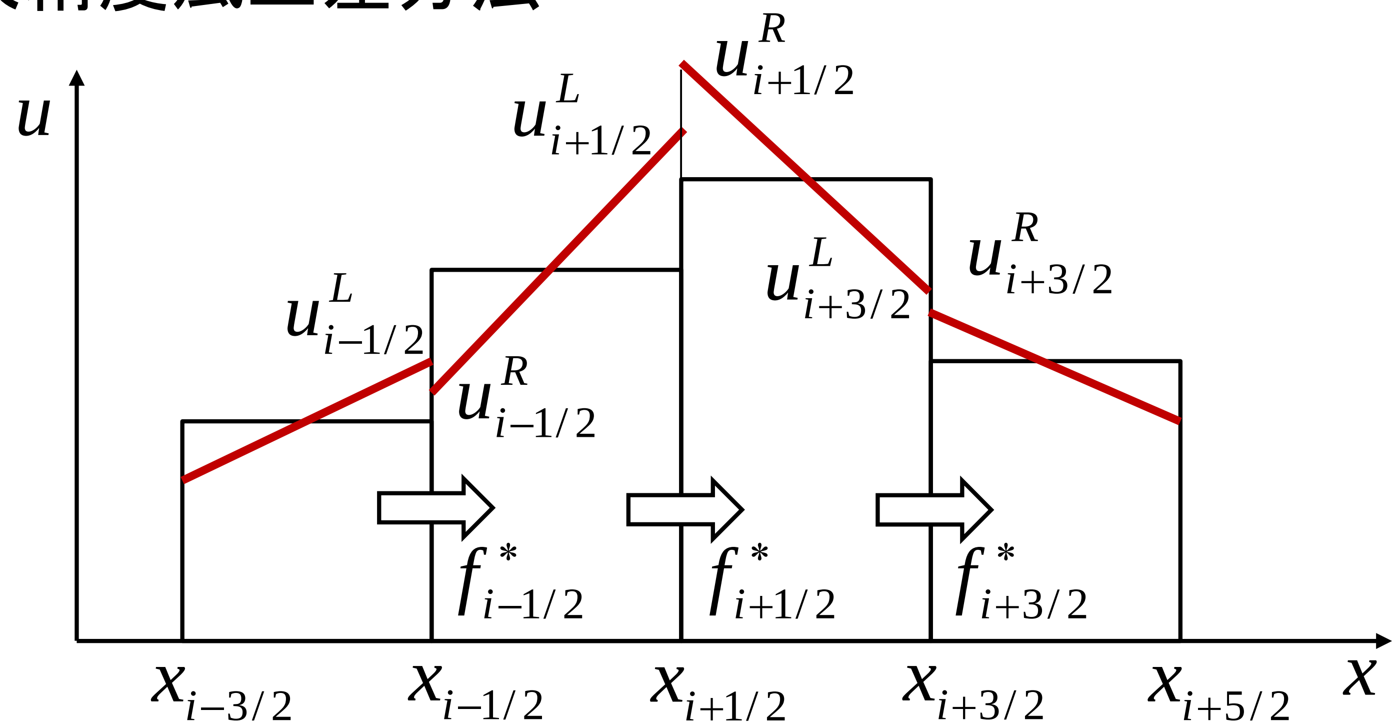
1次精度風上差分法



$$f^*_{i+1/2} = \frac{a}{2}\left(u^n_{i+1} + u^n_i\right) - \frac{|a|}{2}\left(u^n_{i+1} - u^n_i\right)$$

高次精度風上差分法

2次精度風上差分法

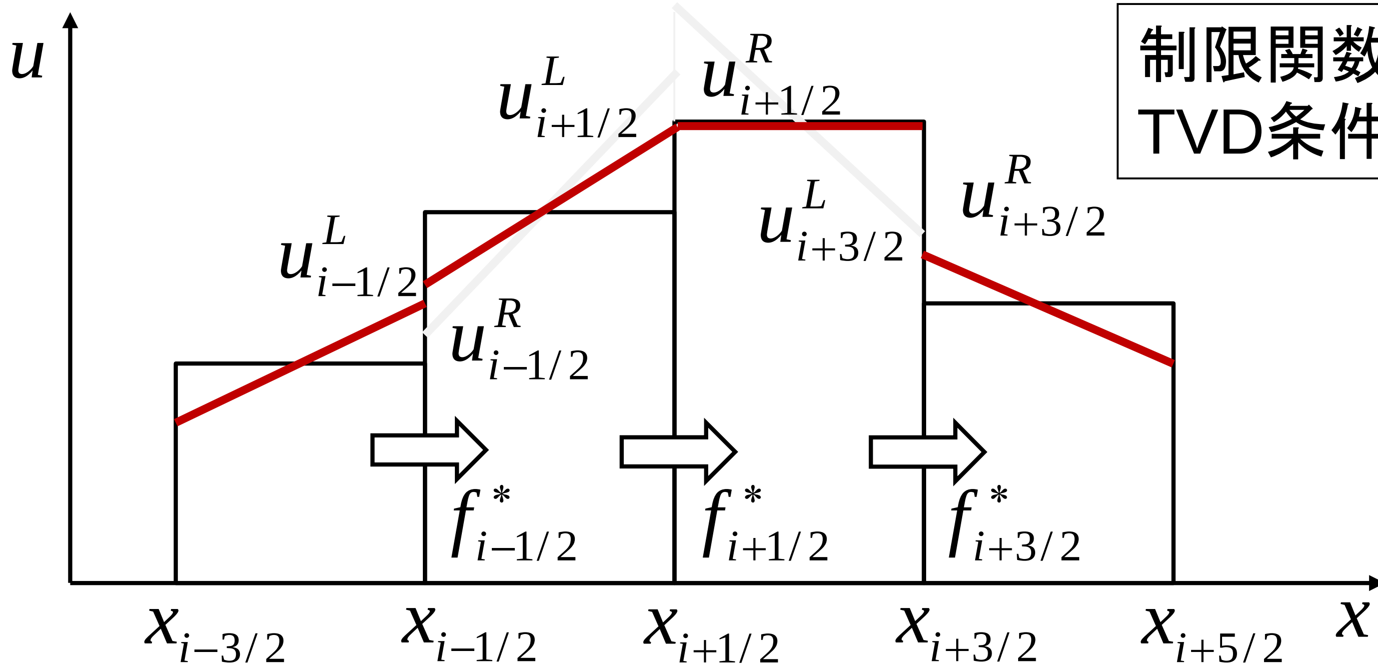


$$f^*_{i+1/2} = \frac{a}{2}\left(u^L_{i+1/2} + u^R_{i+1/2}\right) - \frac{|a|}{2}\left(u^R_{i+1/2} - u^L_{i+1/2}\right)$$

高次精度風上差分法

- MUSCL

$$u_{i-1} \le u^R_{i-1/2} \le u_i \le u^L_{i+1/2} \le u_{i+1}$$



制限関数によって
TVD条件を満足

$$f^*_{i+1/2} = \frac{a}{2}\left(u^L_{i+1/2} + u^R_{i+1/2}\right) - \frac{|a|}{2}\left(u^R_{i+1/2} - u^L_{i+1/2}\right)$$

高次精度風上差分法

- MUSCL

x_i のまわりでTaylor展開

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i)\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} + \frac{1}{2}(x - x_i)^2 \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x} + O(\Delta x^3)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} + (x - x_i)\frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

高次精度風上差分法

- MUSCL

$x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$ で積分

$$u_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x)dx = u(x_i) + \frac{\Delta x^2}{24}\frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} + O(\Delta x^4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x)}{\partial x}dx = \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}dx = \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

もう時間方向のnはやめますね・・・

高次精度風上差分法

- MUSCL

$$u(x) = u_i + (x - x_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{1}{2}\left((x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

$$u_{i+1/2}^L \equiv u(x_{i+1/2}) = u_i + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

$$u_{i-1/2}^R \equiv u(x_{i-1/2}) = u_i - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

高次精度風上差分法

MUSCL

$$u_{i+1/2}^{L} = u_i + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\kappa \Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i$$

$$u_{i-1/2}^{R} = u_i - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\kappa \Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i$$

$\kappa = 1/3$：3次精度

あとちょっと。

以下を用いると・・・

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

高次精度風上差分法

- MUSCL

$$u_{i+1/2}^{L} = u_i + \frac{1-\kappa}{4}\left(u_i - u_{i-1}\right) + \frac{1+\kappa}{4}\left(u_{i+1} - u_i\right)$$

$$u_{i-1/2}^{R} = u_i - \frac{1-\kappa}{4}\left(u_{i+1} - u_i\right) - \frac{1+\kappa}{4}\left(u_i - u_{i-1}\right)$$

$\kappa = -1$ ：2次の完全風上差分

$\kappa = 0$ ：2次の風上バイアス差分

$\kappa = 1/3$ ：3次の風上バイアス差分

$\kappa = 0$ ：隣接セル値の代数平均

高次精度風上差分法

- MUSCL

$$u_{i+1/2}^{L} = u_i + \frac{1-\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i)$$

$$\Rightarrow u_{i+1} - u_{i+1/2}^{L} = \frac{3-\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1-\kappa}{4}(u_i - u_{i-1})$$

$$u_{i-1/2}^{R} = u_i - \frac{1-\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4}(u_i - u_{i-1})$$

$$\Rightarrow u_{i-1/2}^{R} - u_{i-1} = \frac{3-\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}) - \frac{1-\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i)$$

$\kappa < 1$のとき単調性を維持できない ⇒ 制限関数の導入

高次精度風上差分法

- MUSCL

$$u_{i+1/2}^{L} = u_i + \frac{1-\kappa}{4}\Phi(1/r)(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}\Phi(r)(u_{i+1} - u_i)$$

$$u_{i-1/2}^{R} = u_i - \frac{1-\kappa}{4}\Phi(r)(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4}\Phi(1/r)(u_i - u_{i-1})$$

$$r \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}$$

$\Phi(r)$:（流束）制限関数

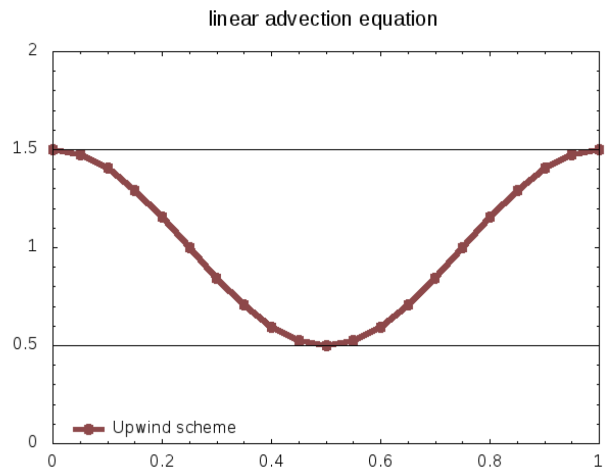
$\Phi(r)/r = \Phi(1/r)$ の場合、

$$u_{i+1/2}^{L} = u_i + \frac{1}{2}\Phi(1/r)(u_i - u_{i-1}),\quad u_{i-1/2}^{R} = u_i - \frac{1}{2}\Phi(r)(u_{i+1} - u_i)$$

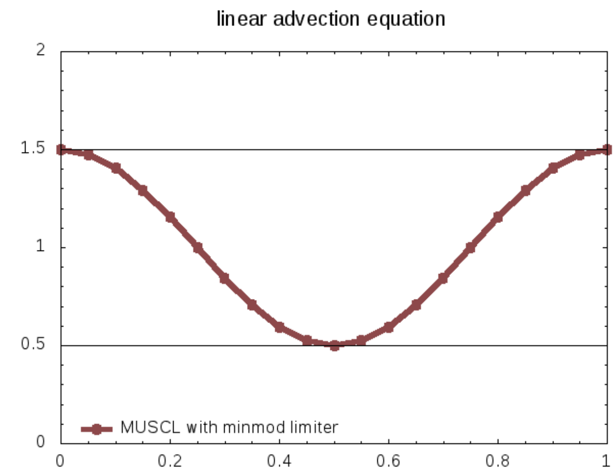
高次精度風上差分法

□ 数値実験（cos関数）

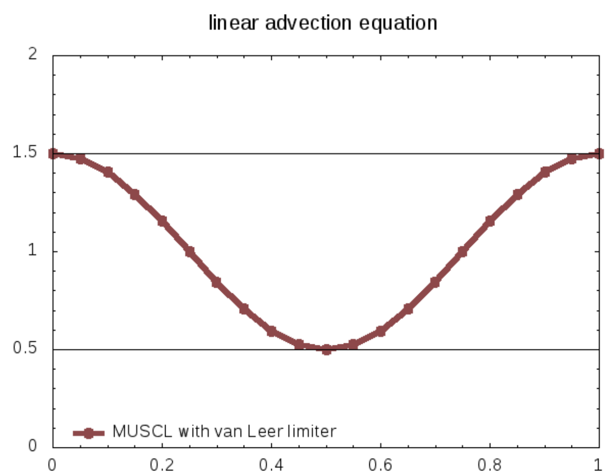
$$\left(\nu = 0.5\right)$$



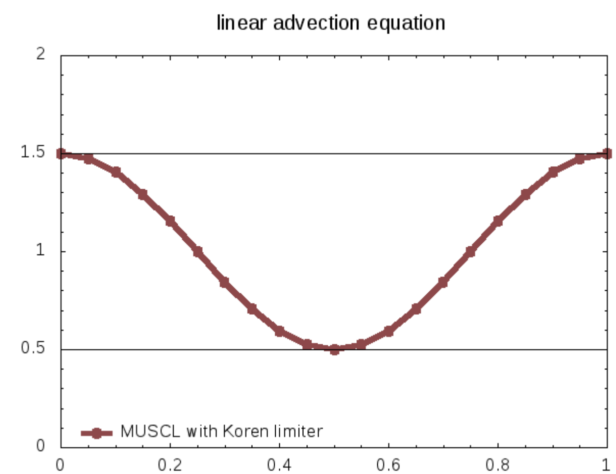
風上差分法



MUSCL (minmod)



MUSCL (van Leer)

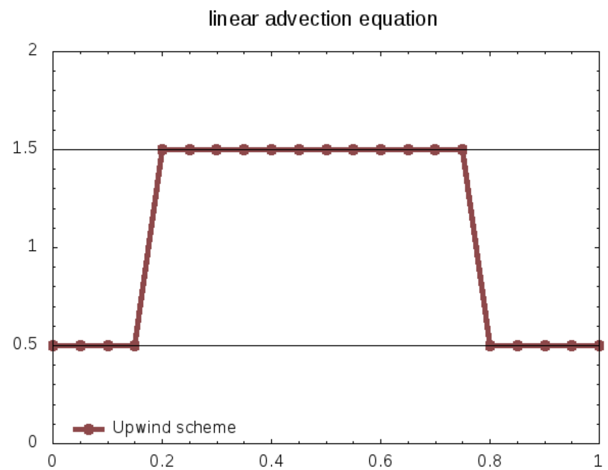


MUSCL (Koren)

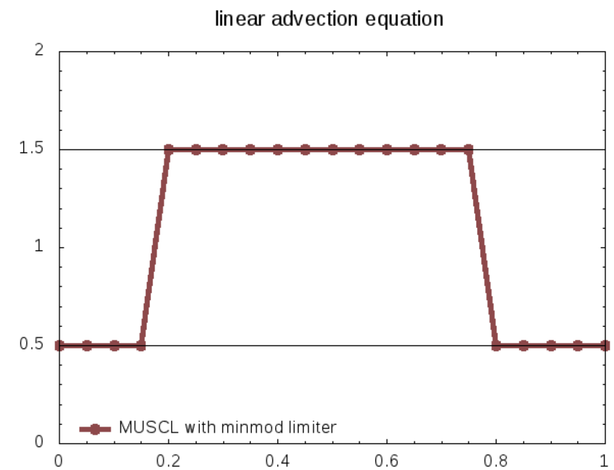
高次精度風上差分法

□ 数値実験（階段関数）

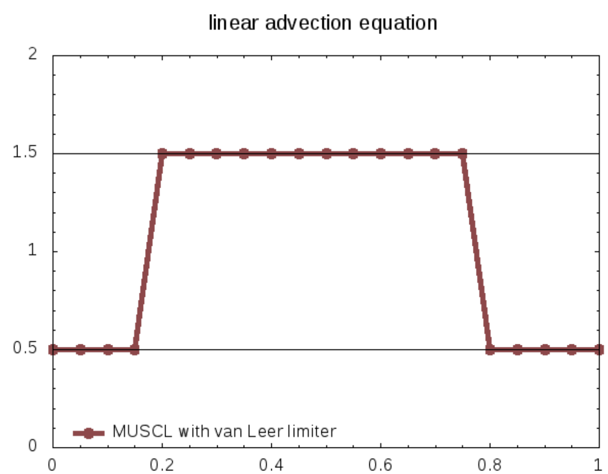
$(\nu = 0.5)$



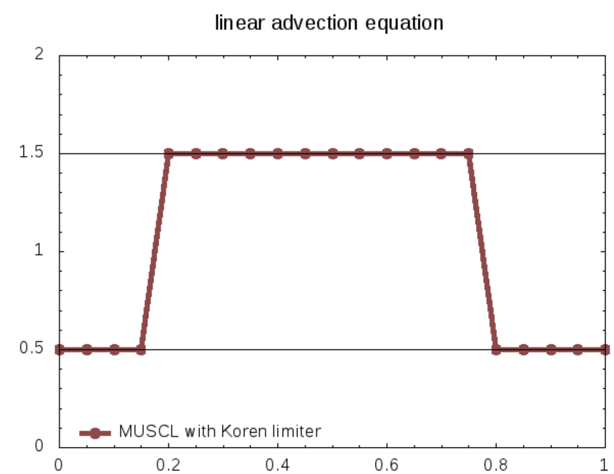
風上差分法



MUSCL (minmod)



MUSCL (van Leer)



MUSCL (Koren)

高次精度風上差分法

- WENOスキーム
  - Weighted Essentially Non-Oscillatory scheme [Jiang+, 1996]
  - ENOでは滑らかさを指標にして補間関数を選択
    - TVB（Total Variation Bounded）

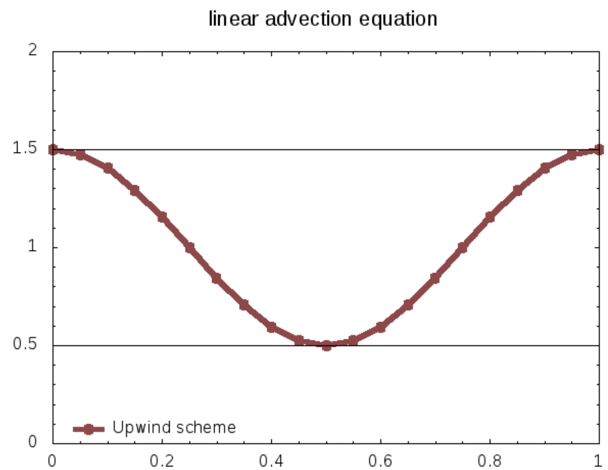
$$TV^n \le B$$

  - WENOはENOの重み付き平均で高次精度化
  - ここでは結果だけ

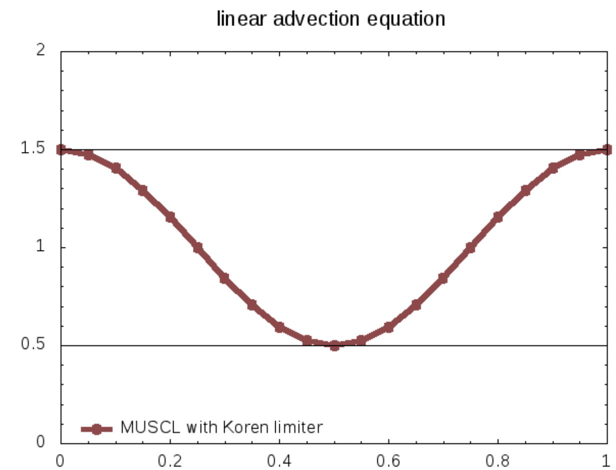
高次精度風上差分法

□ 数値実験（cos関数）

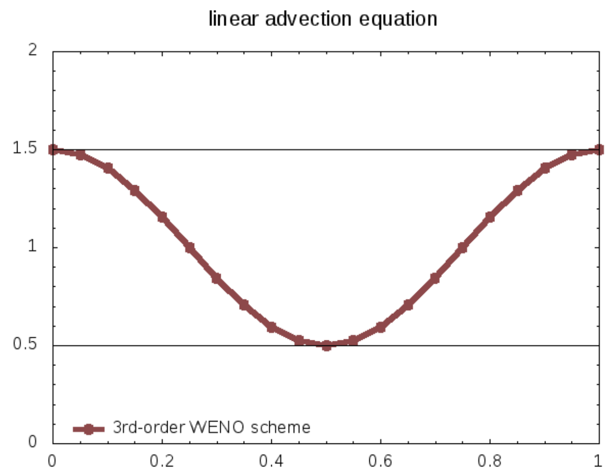
$(\nu = 0.5)$



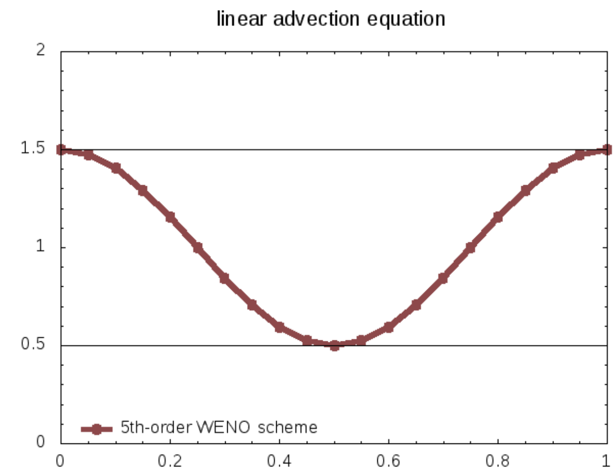
風上差分法



MUSCL (Koren)



3rd-order WENO

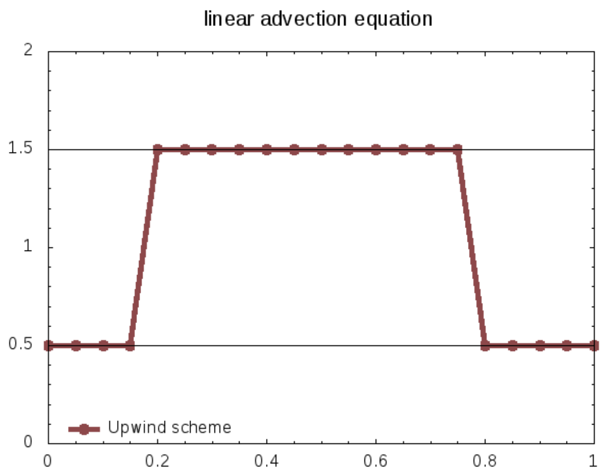


5th-order WENO

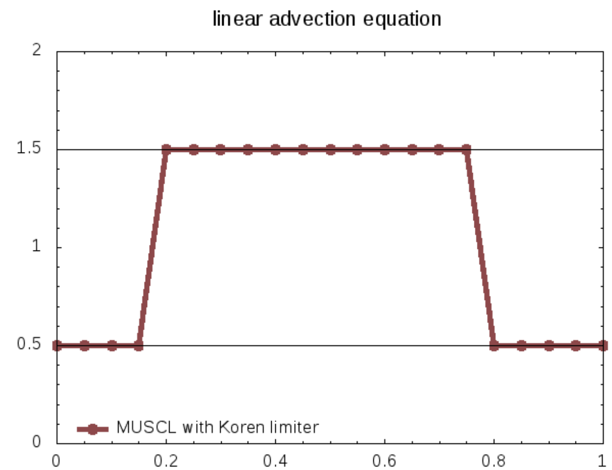
高次精度風上差分法

数値実験（階段関数）

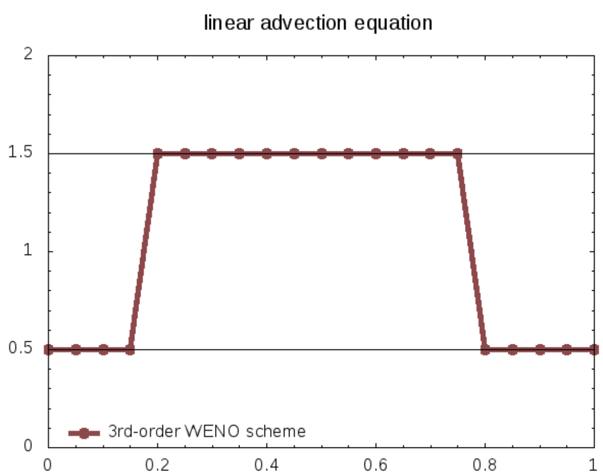
$(\nu = 0.5)$



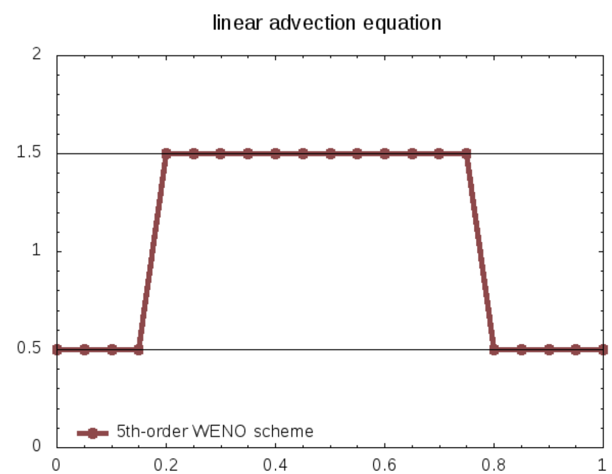
風上差分法



MUSCL (Koren)



3rd-order WENO



5th-order WENO

まとめ

- 重要なキーワード幾つおぼえてますか？
  - 風上差分法
  - CFL条件 / Courant数
  - von Neumannの安定性解析
  - Godunovの定理
  - TVD / MUSCL / WENO
- 後半は難しい上に、駆け足になったはずです。（予定）
  - 大丈夫、大事なことは2時限目にもう一度いいます。
  - 大丈夫、飯島先生がしっかりと教えてくれます。

一旦おしまい

お疲れ様でした