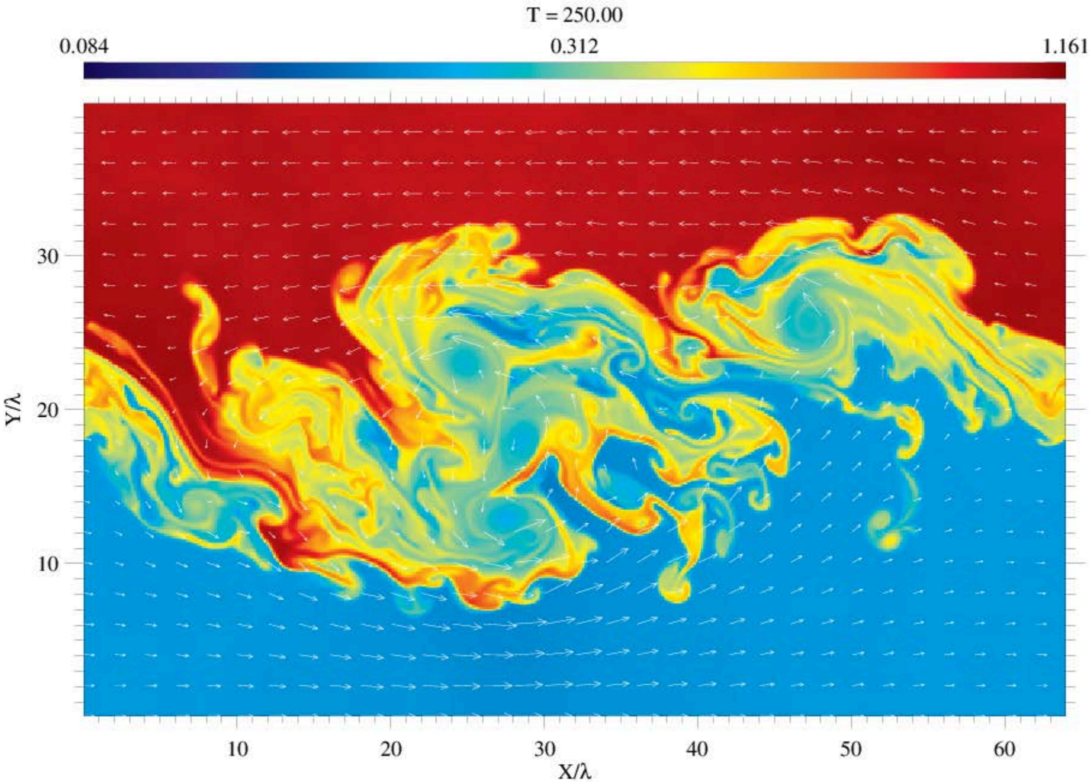
MHDシミュレーションの高次精度化と多次元化

簑島　敬（海洋研究開発機構）

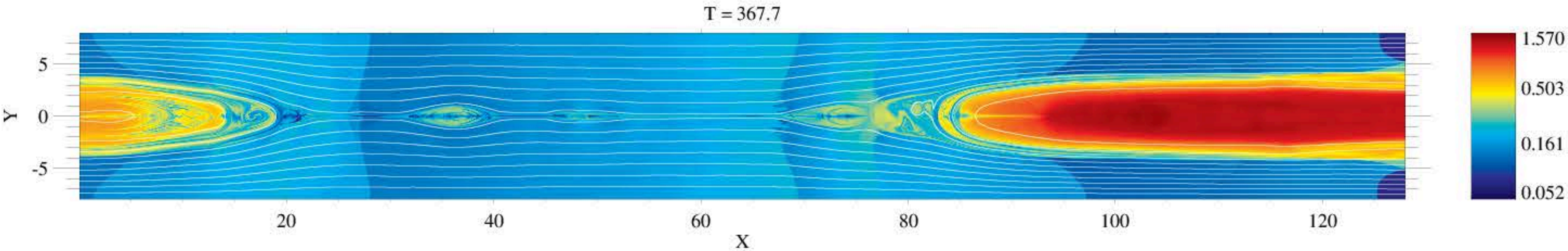
内容

- 高解像度磁気流体シミュレーションのための技術を学ぶ

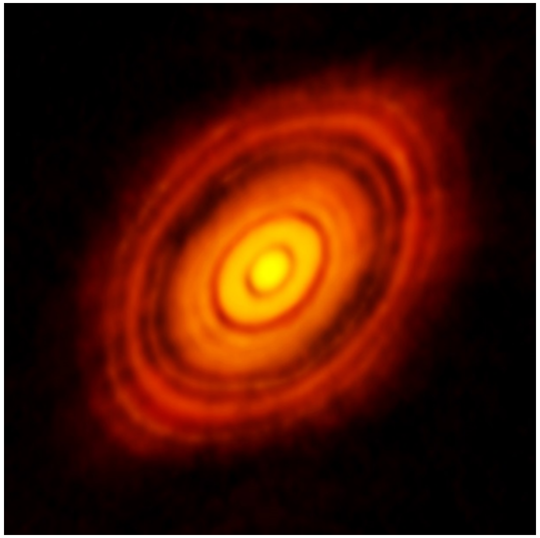
ケルビン・ヘルムホルツ不安定

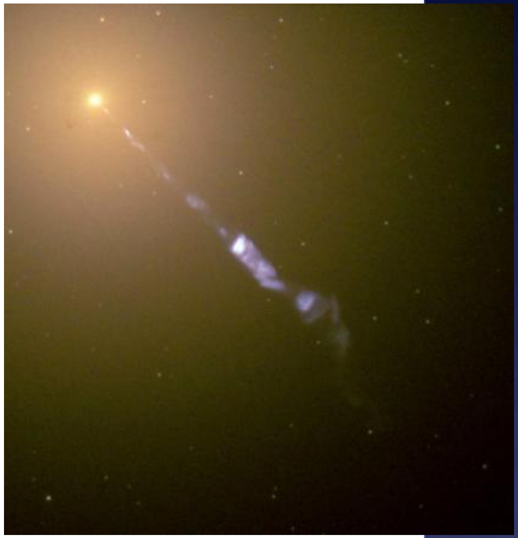


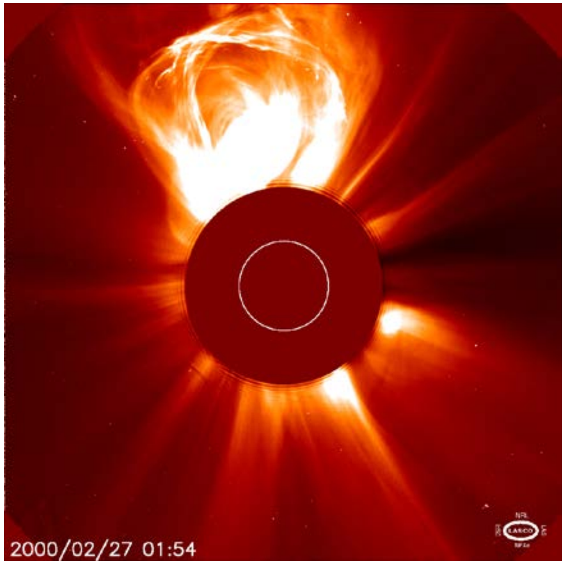
磁気リコネクション

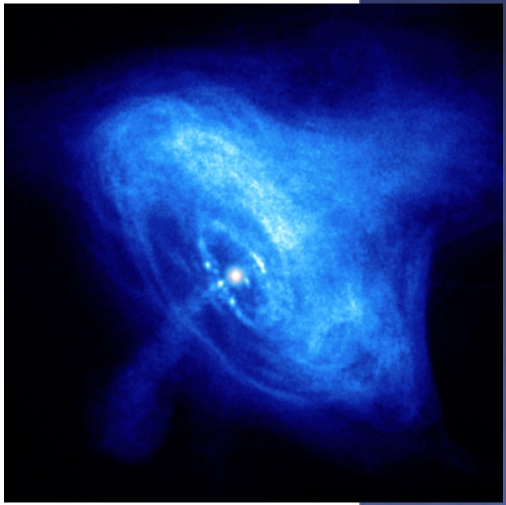


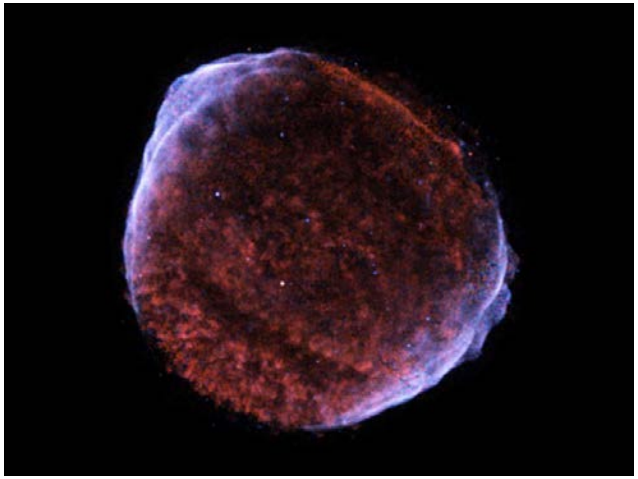
宇宙流体











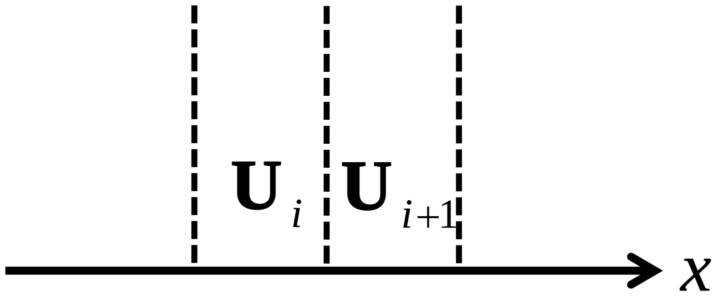
- 高速流、非一様性、圧縮性
- 希薄、低粘性、低電気抵抗
- 磁場、輻射、相対論

MHDシミュレーションの基本

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \Delta t \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

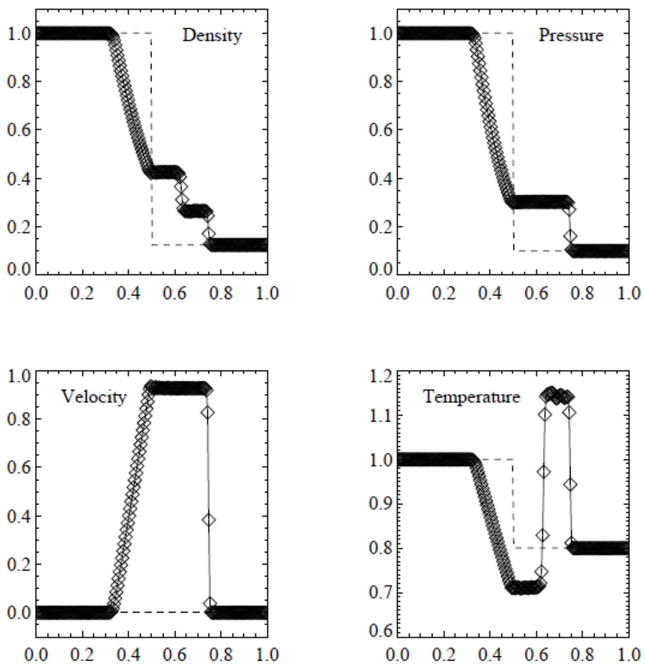
U: 保存量ベクトル（密度、運動量、磁場、エネルギー）
F: 流束ベクトル

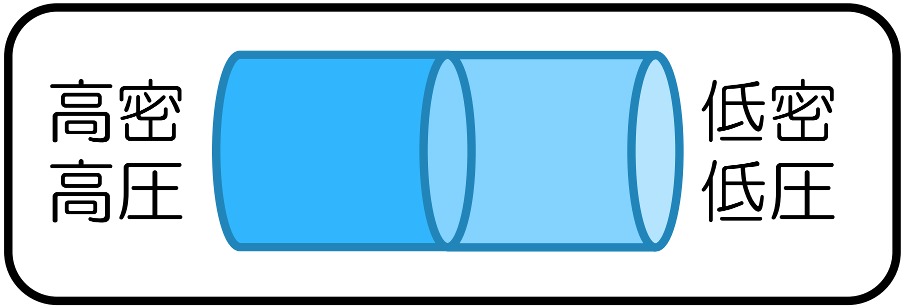
$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathrm{Riemann}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}).$$



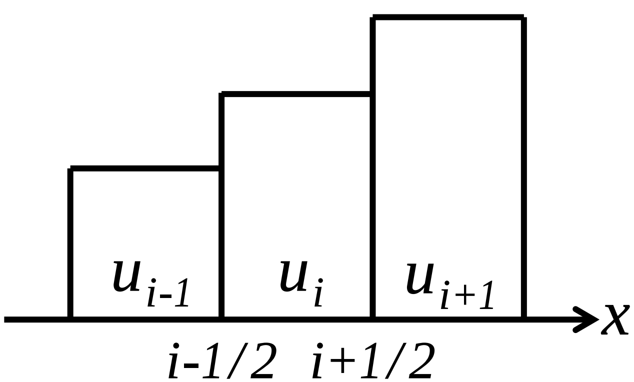
Riemann: 衝撃波管問題を解く（近似）
リーマンソルバ。Roe, HLL, HLLD, など

衝撃波管問題とリーマンソルバ





- **衝撃波管問題**：異なる状態の流体を仕切りで分けて、仕切りを取り去った後の状態を求める**物理問題**
- リーマンソルバ：セルi, $i+1$を異なる状態、$i+1/2$を仕切りとみなして、衝撃波管問題を解く**数値手法**

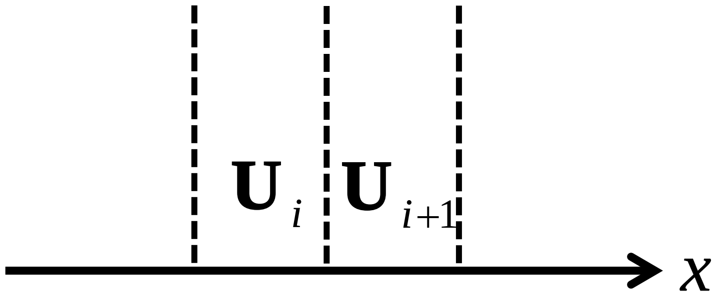


MHDシミュレーションの実用化

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \Delta t \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

U: 保存量ベクトル（密度、運動量、磁場、エネルギー）
F: 流束ベクトル

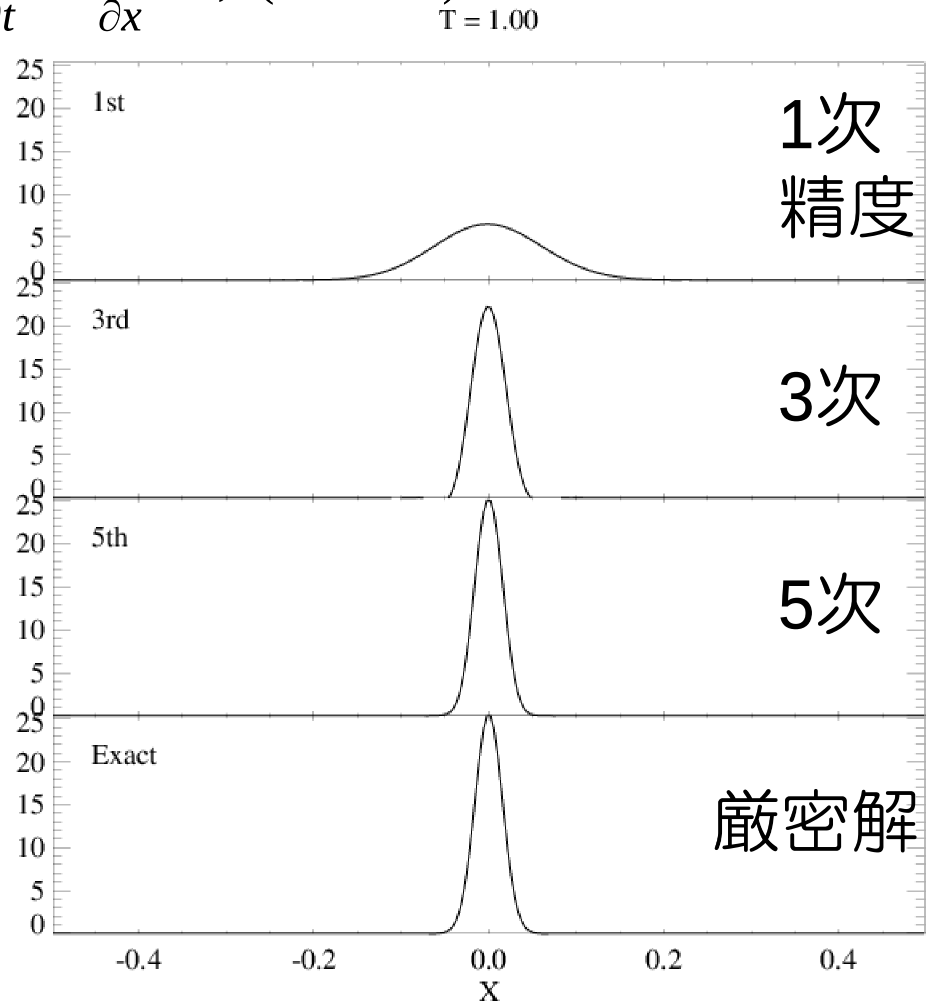
$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathrm{Riemann}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}).$$



- 高次精度化
- 多次元化 → $$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0$$

高次精度化とは

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c = \mathrm{const})$$



- 物理量プロファイルを**高次関数で近似**して、**高解像度の解**を得る

$$u(\Delta x) \sim u(0) + u'(0)\Delta x,$$

↑1次

$$u(\Delta x) \sim u(0) + u'(0)\Delta x$$

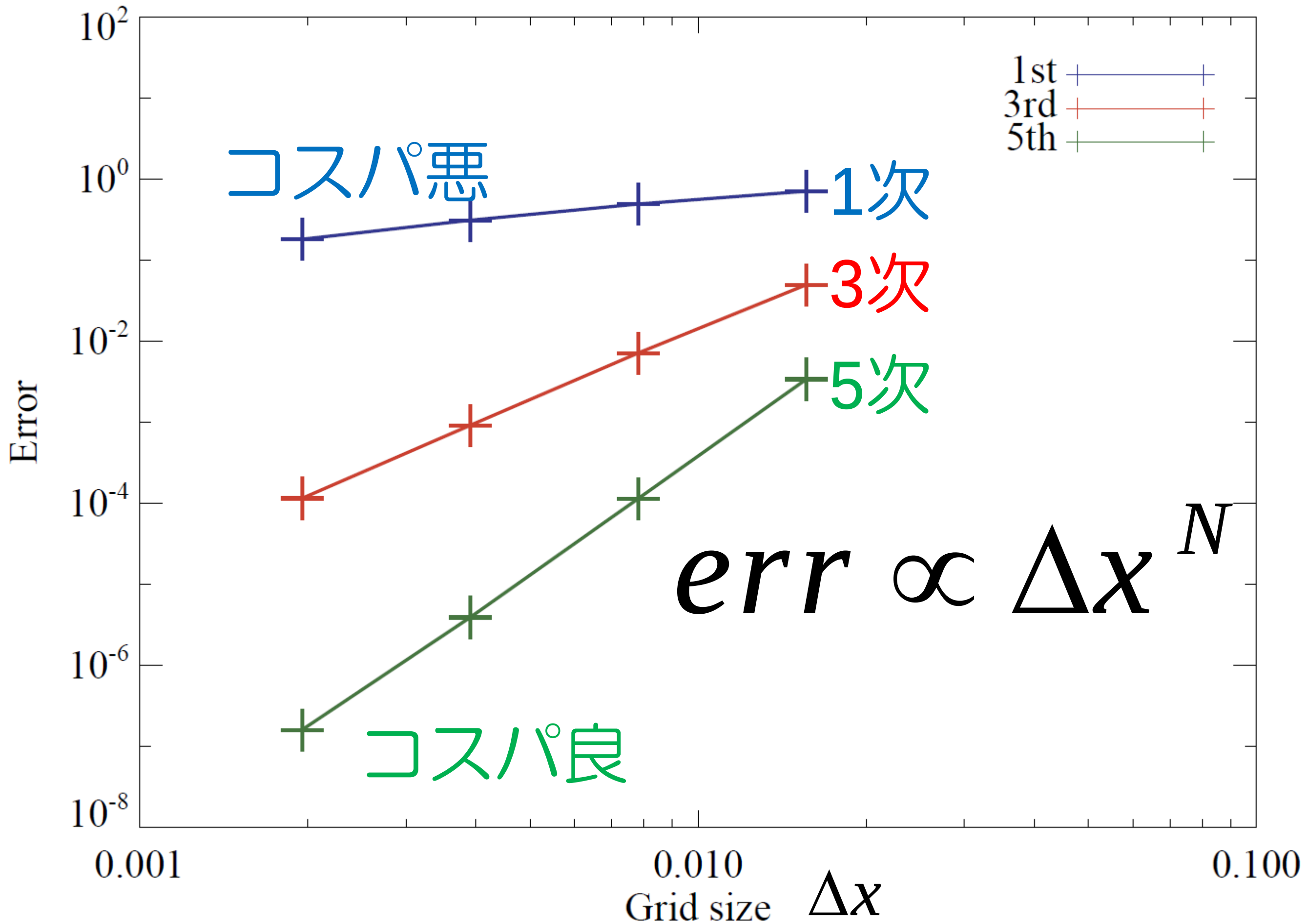
$$+ u''(0)\Delta x^2 / 2$$

$$+ u'''(0)\Delta x^3 / 6,$$

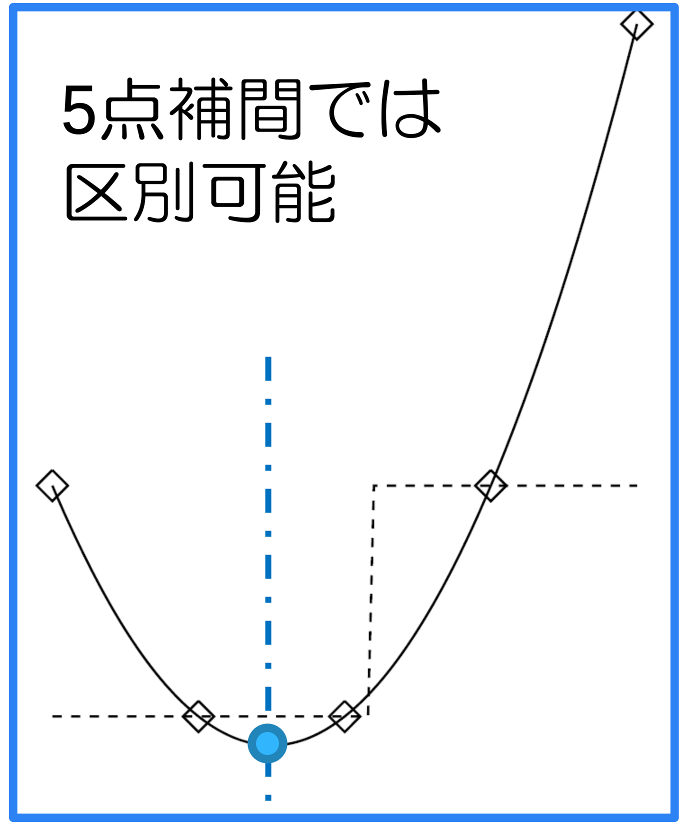
↑3次

高次精度化の必要性

N次精度スキームの誤差



高次精度化の必要性

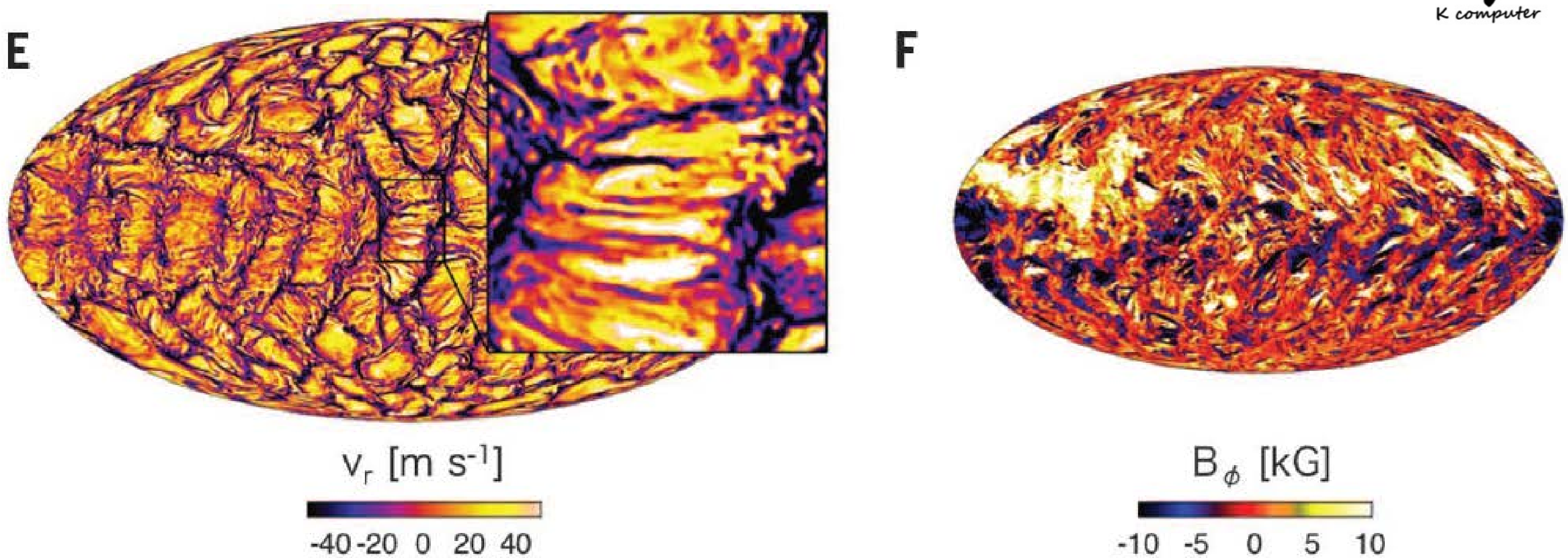


- ステンシルを広げてプロファイルを正確に再現

高次精度化の必要性

- 数値的な散逸を抑え、細かな構造を表現
  - 計算グリッドを増やす
  - 計算スキームを高次精度化する

超高解像度太陽ダイナモ計算（Hotta+16）



スカラー方程式の高次精度化例

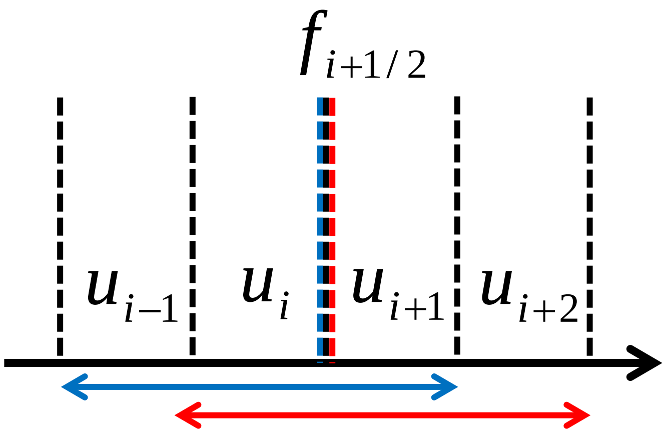
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad f=cu \Rightarrow \quad \frac{du_i}{dt}=-\frac{f_{i+1/2}-f_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

c=一定

例：線形3次精度

$$u^L_{i+1/2}=\left(-u_{i-1}+5u_i+2u_{i+1}\right)/6$$

$$u^R_{i+1/2}=\left(-u_{i+2}+5u_{i+1}+2u_i\right)/6$$



$$f_{i+1/2}=\mathrm{Riemann}\left(cu^L_{i+1/2},cu^R_{i+1/2}\right)$$

$$=\begin{cases} cu^L_{i+1/2}, & \text{if } c>0 \\ cu^R_{i+1/2}, & \text{if } c\le 0 \end{cases}$$

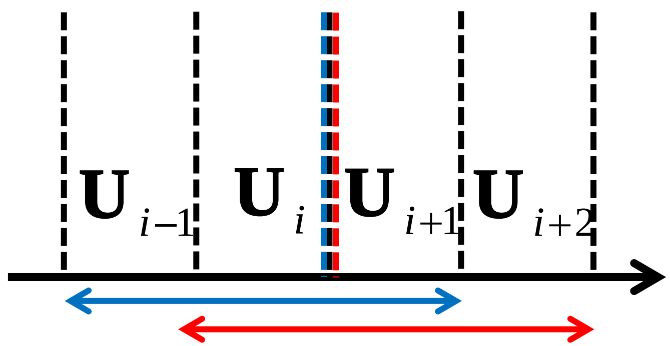
風上化

流体シミュレーションの高次精度化例

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}_i}{dt}=-\frac{\mathbf{F}_{i+1/2}-\mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

$\mathbf{U}$: 保存量ベクトル
$\mathbf{F}$: 流束ベクトル

$$\mathbf{F}_{i+1/2}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^L_{i+1/2},\mathbf{U}^R_{i+1/2}).$$



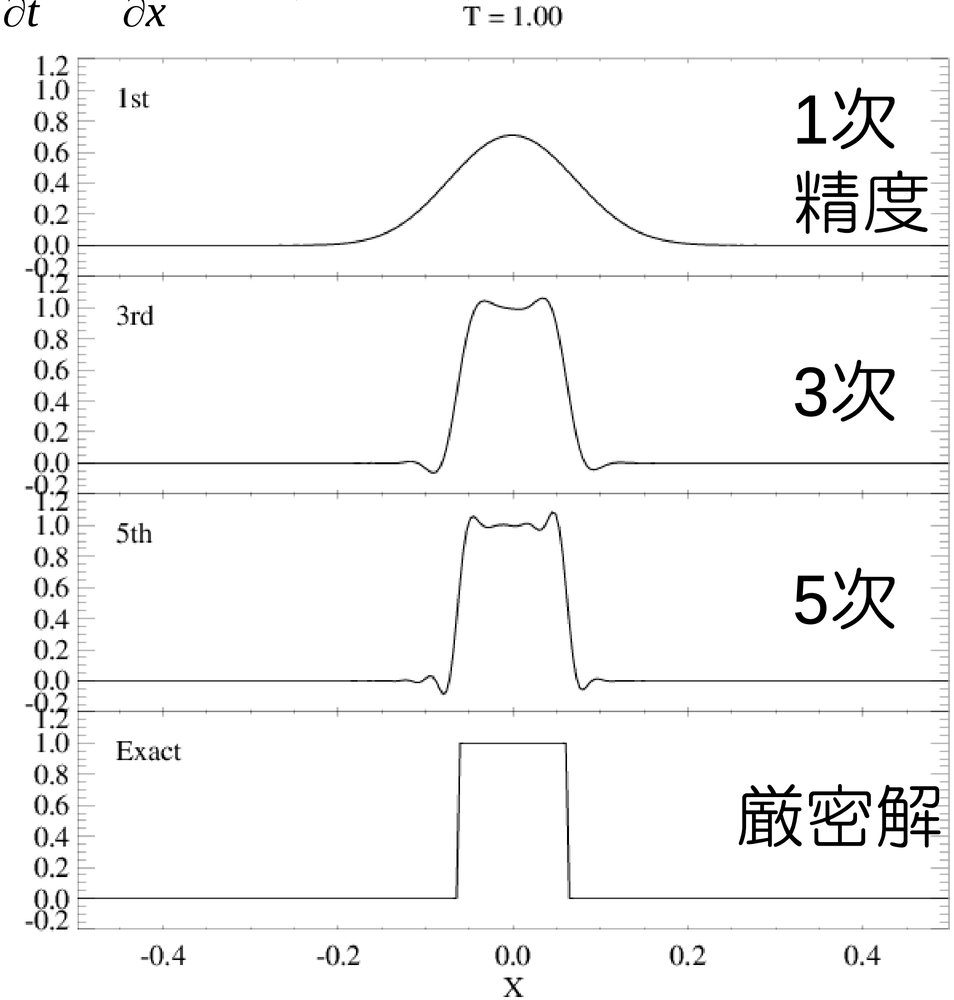
例えば線形3次精度

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2}=\left(-\mathbf{U}_{i-1}+5\mathbf{U}_i+2\mathbf{U}_{i+1}\right)/6$$

$$\mathbf{U}^R_{i+1/2}=\left(-\mathbf{U}_{i+2}+5\mathbf{U}_{i+1}+2\mathbf{U}_{i}\right)/6$$

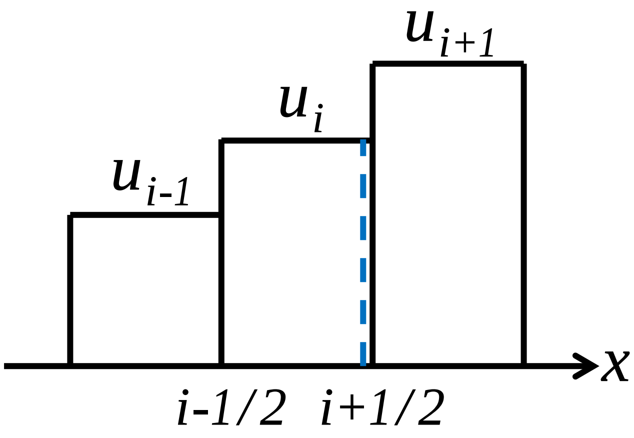
高次精度化の欠点

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad (c=\mathrm{const})$$



- 不連続面近傍の<u>数値振動</u>
- 「<u>線形2次以上スキーム</u>は解の単調性を維持できない」（Godunovの定理）
- 非線形スキームの導入

非線形スキーム



- 場所によって精度が異なる

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2}=\left(-\mathbf{U}_{i-1}+5\mathbf{U}_i+2\mathbf{U}_{i+1}\right)/6$$

線形スキーム
係数がどこでも-1:5:2

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2}=\left(c_i^L\mathbf{U}_{i-1}+c_i^C\mathbf{U}_i+c_i^R\mathbf{U}_{i+1}\right).$$

非線形スキーム
<u>周囲の状況に応じて</u> c_i を適切に決める

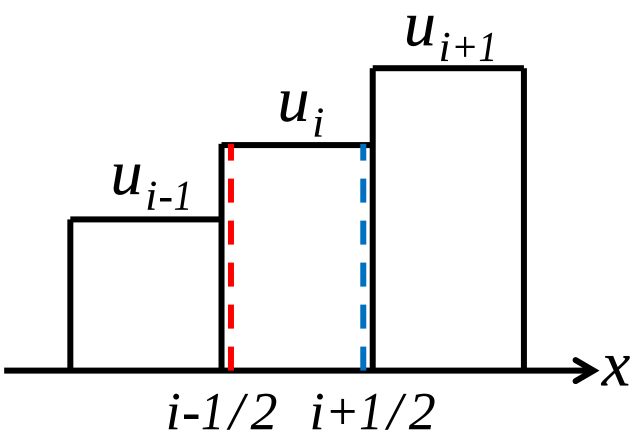
非線形スキーム

- 低精度@不連続面付近（衝撃波）
- 高精度@滑らかな領域（乱流）

- **M**onotone **U**pstream-centered **S**chemes for **C**onservation **L**aws（**MUSCL**; van Leer 1979, CANS+に実装）
- **W**eighted **E**ssentially **N**on-**O**scillatory scheme（**WENO**; Jiang+ 1996）
- Monotonicity **P**reserving scheme（**MP**; Suresh+ 1997, CANS+に実装）

http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id17

MUSCL法



- セル平均値（既知）

$$u_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x)dx,$$

- テーラー展開に基づくセル*i*内の分布

$$u(x) = u(x_i) + u_i'(x_i)(x - x_i) + u_i''(x_i)(x - x_i)^2/2 + \dots$$

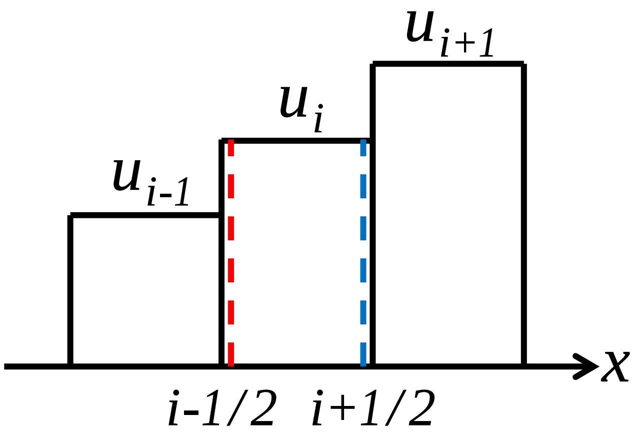
$$\approx u_i + \frac{x - x_i}{2\Delta x}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2}\left[(x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right](u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}),$$

- セル境界値

$$u_{i+1/2}^L = u(x_{i+1/2}) = u_i + \frac{1-\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i),$$

$$u_{i-1/2}^R = u(x_{i-1/2}) = u_i - \frac{1-\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}),$$

MUSCL法



- 流束制限関数Φの導入
  - 極値の発生を禁止

$$u_{i-1} < \underline{u^R_{i-1/2}} < u_i < \underline{u^L_{i+1/2}} < u_{i+1}$$

$$u^L_{i+1/2} = u_i + \frac{1-\kappa}{4}\Phi(r)(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}\Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i),$$

$$u^R_{i-1/2} = u_i - \frac{1-\kappa}{4}\Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4}\Phi(r)(u_i - u_{i-1}),$$

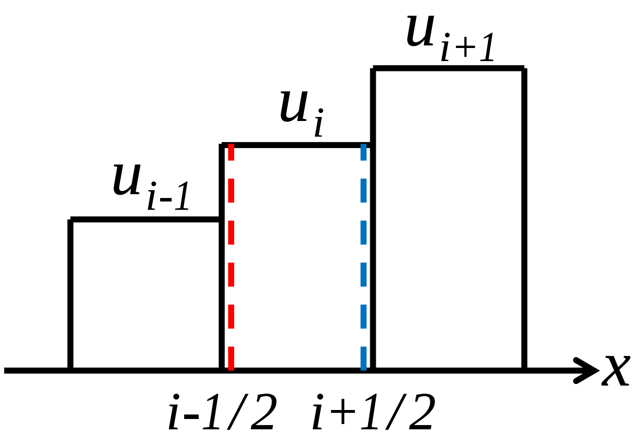
$$r = (u_{i+1} - u_i)/(u_i - u_{i-1}),$$

- 代表的な場合： $\Phi(r)=r\,\Phi(1/r)$, κ=-1

$$u^L_{i+1/2} = u_i + \Phi(r)(u_i - u_{i-1})/2,$$

$$u^R_{i-1/2} = u_i - \Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i)/2.$$

2次MUSCL法



- 流束制限関数
  - MinMod

$$\Phi(r) = \max[0, \min(1, r)],$$

$$u^L_{i+1/2} = u_i + du_i / 2, u^R_{i-1/2} = u_i - du_i / 2,$$

$$du_i = MM(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1}),$$

$$MM(x, y) = \mathrm{sgn}(x) \max[0, \min(|x|, \mathrm{sgn}(x) y)].$$

sgn(x): xの符号

  - Monotonized Central

$$\Phi(r) = \max[0, \min(2r, 0.5(1+r), 2)],$$

$$u^L_{i+1/2} = u_i + du_i / 2, u^R_{i-1/2} = u_i - du_i / 2,$$

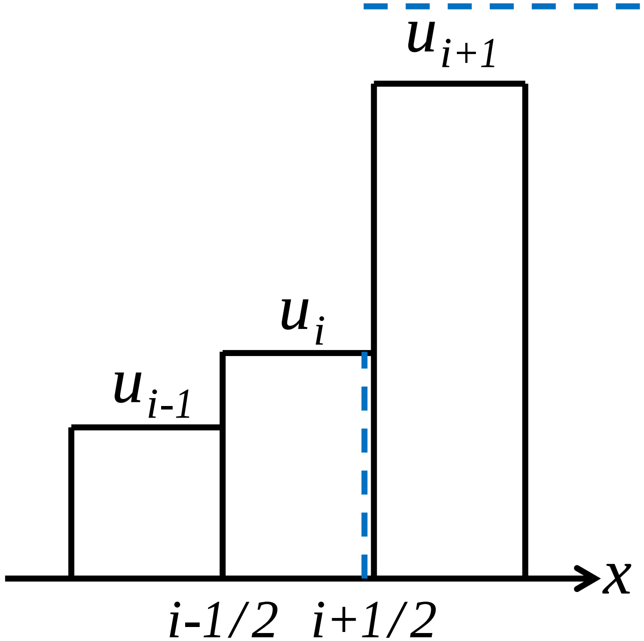
$$du_i = MC(2(u_{i+1} - u_i), 2(u_i - u_{i-1}), (u_{i+1} - u_{i-1}) / 2),$$

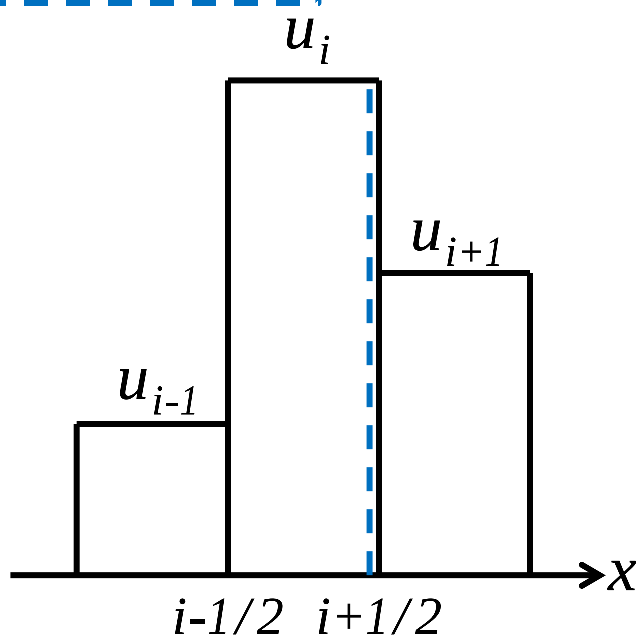
$$MC(x, y, z) = MM(x, MM(y, z)).$$

MUSCL-MinMod

du_i: セルi内の勾配の候補値の内、<u>最も滑らかなものorゼロ</u>

$$\boxed{u_{i+1/2}^{L} = u_i + du_i / 2.}$$





$$|u_i - u_{i-1}| < |u_{i+1} - u_i|$$

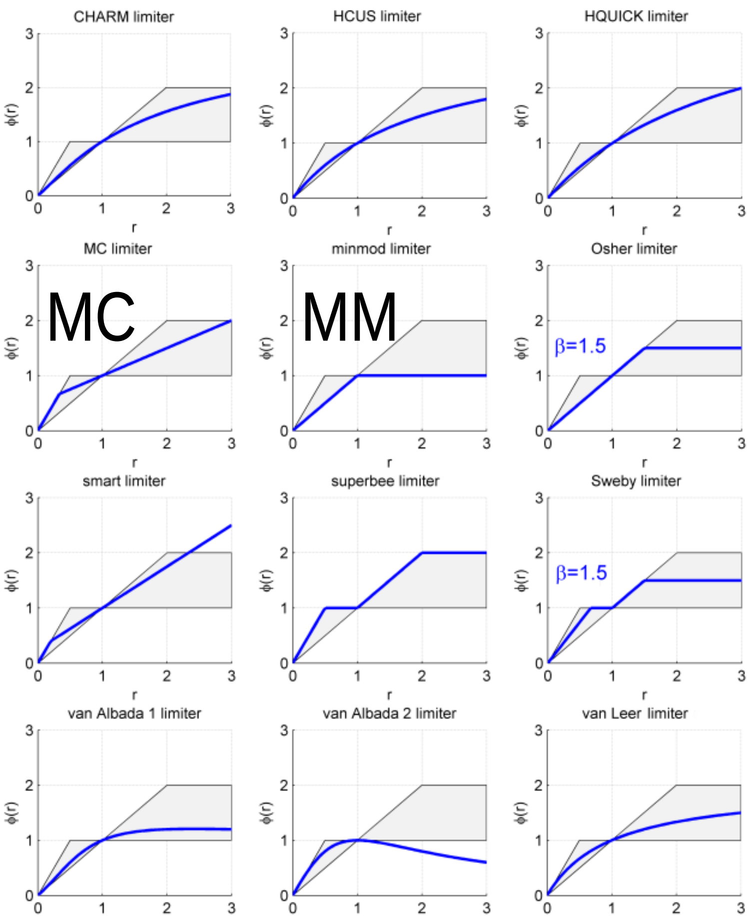
$$\Rightarrow du_i = u_i - u_{i-1}$$

$$(u_i - u_{i-1})(u_{i+1} - u_i) < 0$$

$$\Rightarrow du_i = 0$$

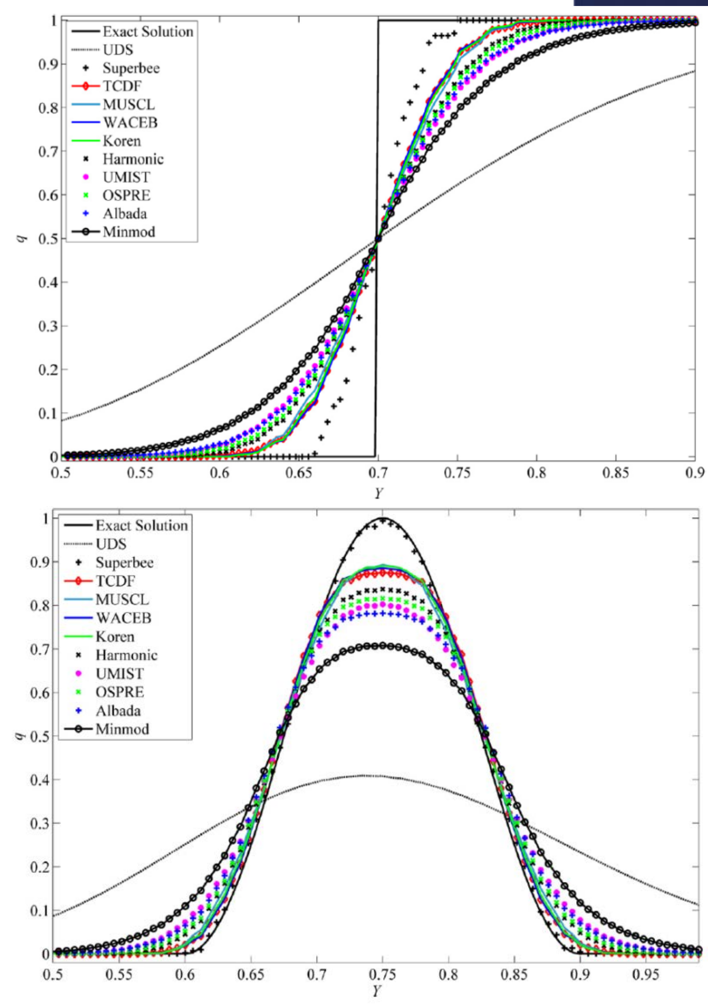
様々な流束制限関数

"**Flux limiter**" makes the solution **T**otal **V**ariation **D**iminishing (**TVD**)

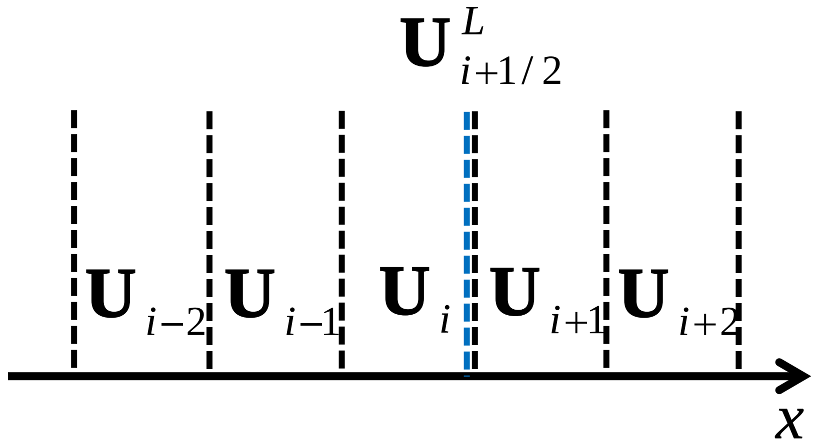


@Wikipedia

Zhang+15



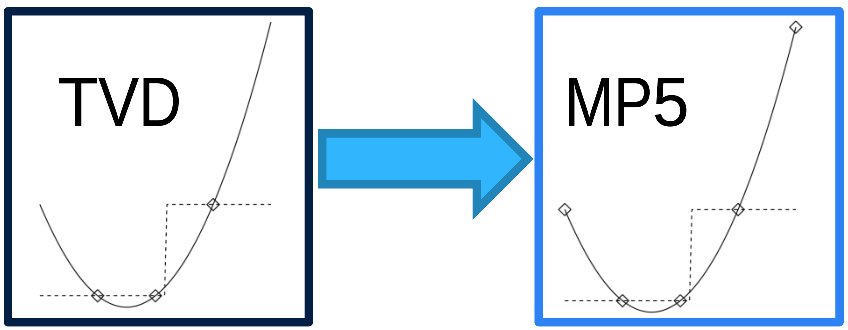
MP5法



- 線形<u>5点補完</u>

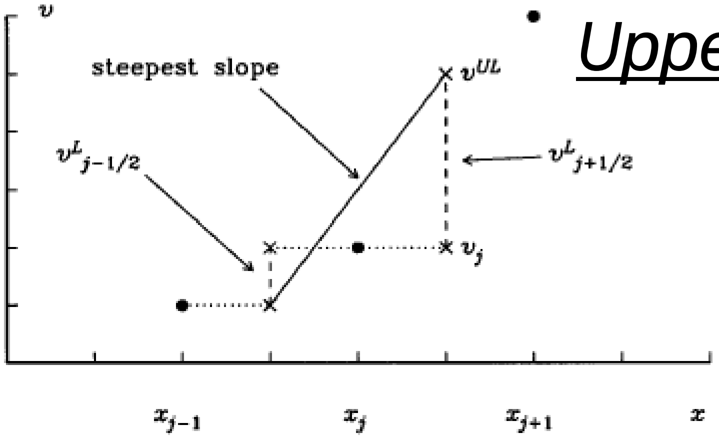
$$\mathbf{U}^{L}_{i+1/2}=\left(2\mathbf{U}_{i-2}-13\mathbf{U}_{i-1}+47\mathbf{U}_{i}+27\mathbf{U}_{i+1}-3\mathbf{U}_{i+2}\right)/60,$$

- 周囲の幾つかの<u>候補値</u>と比較し、**中央値**を取る
  - 単調性維持（数値振動の抑制）
  - <u>極値の保持</u>（MUSCL等のTVDスキームの改良）



MP5法

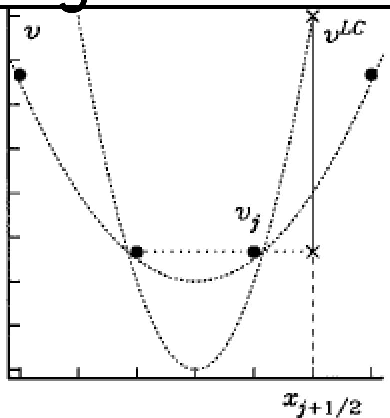
詳細はSuresh+97



Upper limit

$$\mathbf{U}^{UL} = \mathbf{U}_i + \alpha\left(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}\right), \alpha \geq 2$$

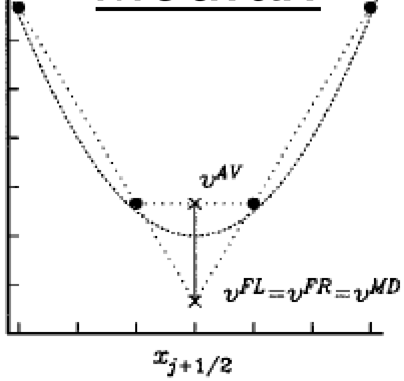
Large curvature



$$\mathbf{U}^{LC} = \mathbf{U}_i + \left(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}\right)/2 + 4\mathbf{d}^{MM}_{i-1/2}/3,$$

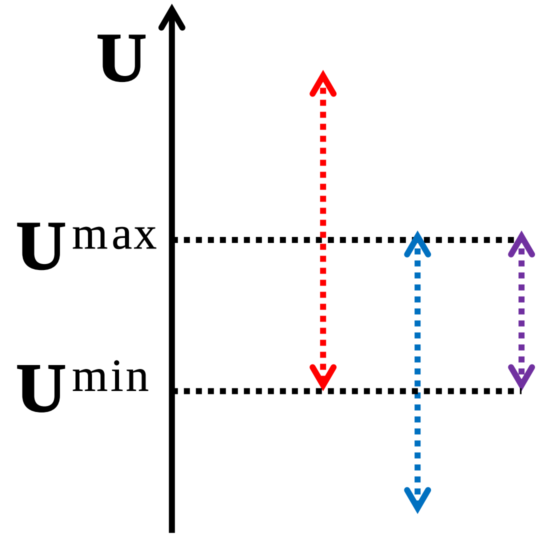
$$\mathbf{d}^{MM}_{i-1/2} = MM(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-2} - 2\mathbf{U}_{i-1}, \quad \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_{i-1} - 2\mathbf{U}_i).$$

Median



$$\mathbf{U}^{MD} = \mathrm{median}[(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1})/2, \quad \mathbf{U}_i + (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1})/2, \mathbf{U}_{i+1} - (\mathbf{U}_{i+2} - \mathbf{U}_{i+1})/2]$$

MP5法



- 単調性維持かつ極値の保持

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{L} \in I[\mathbf{U}_i, \mathbf{U}^{UL}, \mathbf{U}^{LC}] \quad \text{and} \quad I[\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}^{MD}],$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{L} = \left(2\mathbf{U}_{i-2} - 13\mathbf{U}_{i-1} + 47\mathbf{U}_{i} + 27\mathbf{U}_{i+1} - 3\mathbf{U}_{i+2}\right)/60,$$

$$\mathbf{U}^{\max} = \min\left[\max(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}^{MD}), \max(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}^{UL}, \mathbf{U}^{LC})\right],$$

$$\mathbf{U}^{\min} = \max\left[\min(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}^{MD}), \min(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}^{UL}, \mathbf{U}^{LC})\right],$$

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{L} \leftarrow \mathrm{median}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{L}, \mathbf{U}^{\max}, \mathbf{U}^{\min}).$$

時間更新

- 空間精度を上げた際は、時間精度も上げないと数値的に不安定
- ルンゲ・クッタ法: $\frac{dy}{dt} = f(y)$

1次

$$y^{n+1} = y^n + f(y^n)\Delta t.$$

2次（2~3次手法で使用）

$$y^* = y^n + f(y^n)\Delta t,$$

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{2} + \frac{1}{2}\left[y^* + f(y^*)\Delta t\right].$$

3次

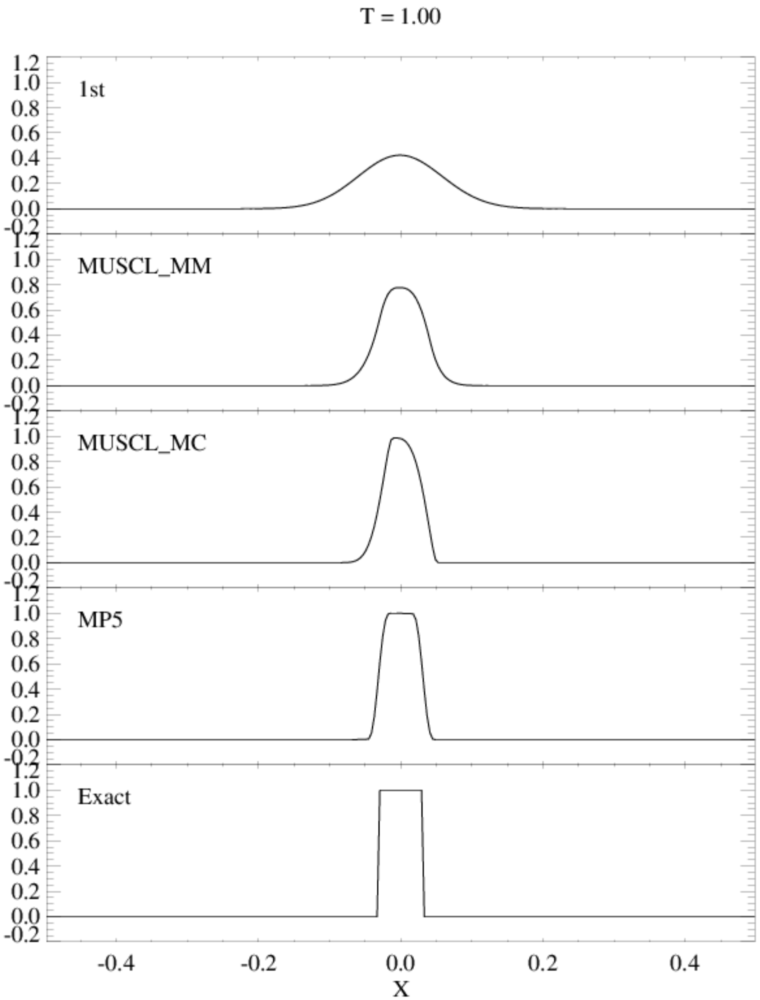
$$y^* = y^n + f(y^n)\Delta t,$$

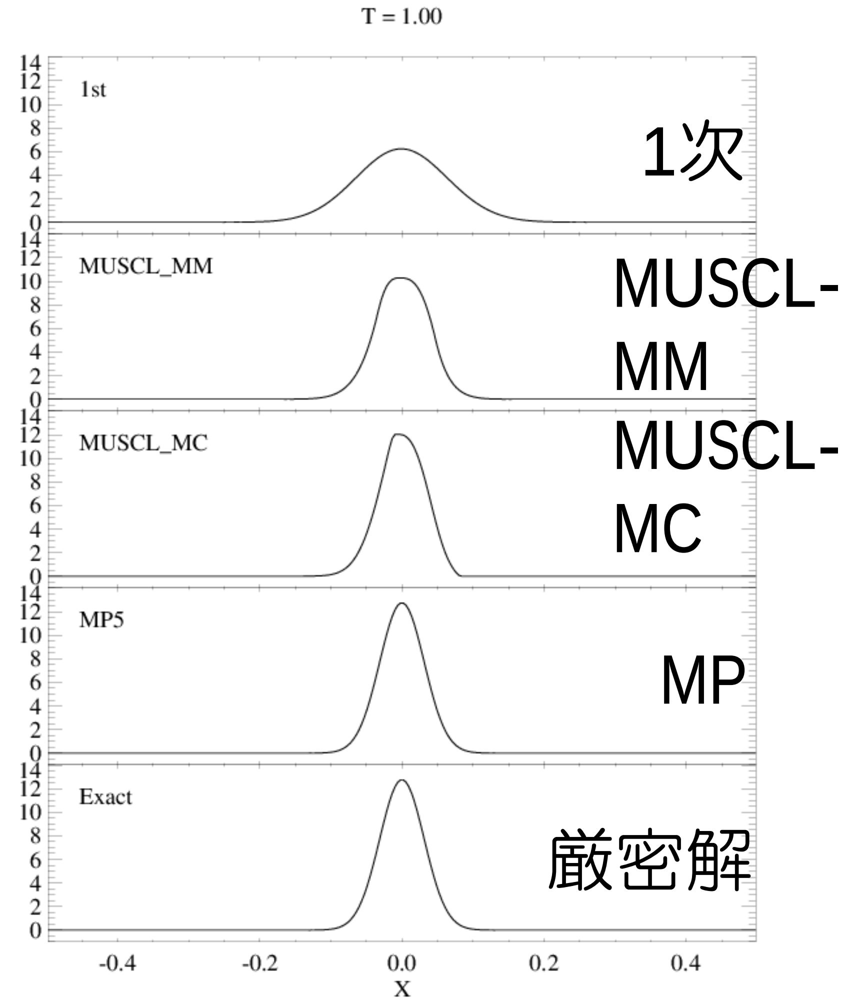
$$y^{**} = \frac{3}{4}y^n + \frac{1}{4}\left[y^* + f(y^*)\Delta t\right],$$

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{3} + \frac{2}{3}\left[y^{**} + f(y^{**})\Delta t\right].$$

線形移流

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c = \mathrm{const})$$





1次元理想MHD方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0,$$

$\mathbf{U} = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e\right)^T,$ ...保存(conserved)変数

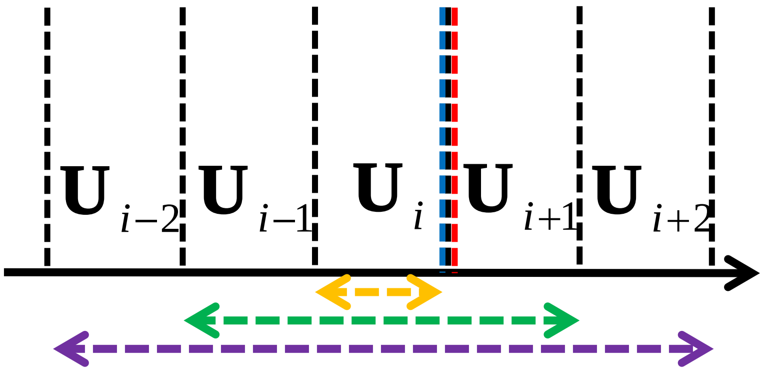
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u - B_x B_x + p + \mathbf{B}^2/2 \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ \left(e + p + \mathbf{B}^2/2\right)u - B_x\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}\right) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} p = (\gamma - 1)\left(e - \rho \mathbf{u}^2/2 - \mathbf{B}^2/2\right), \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \Rightarrow B_x = \text{const}, \end{array}$$

$\mathbf{V} = \left(\rho, u, v, w, B_y, B_z, P\right)^T.$ ...基本(primitive)変数

1次元MHDシミュレーション

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^L_{i+1/2}, \mathbf{U}^R_{i+1/2}).$$



$\mathbf{U}$: 保存量ベクトル

$\mathbf{F}$: 流束ベクトル

- 1次精度

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2} = \mathbf{U}_i,$$

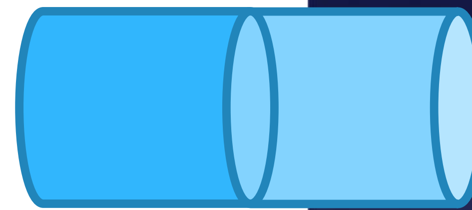
- 2次精度

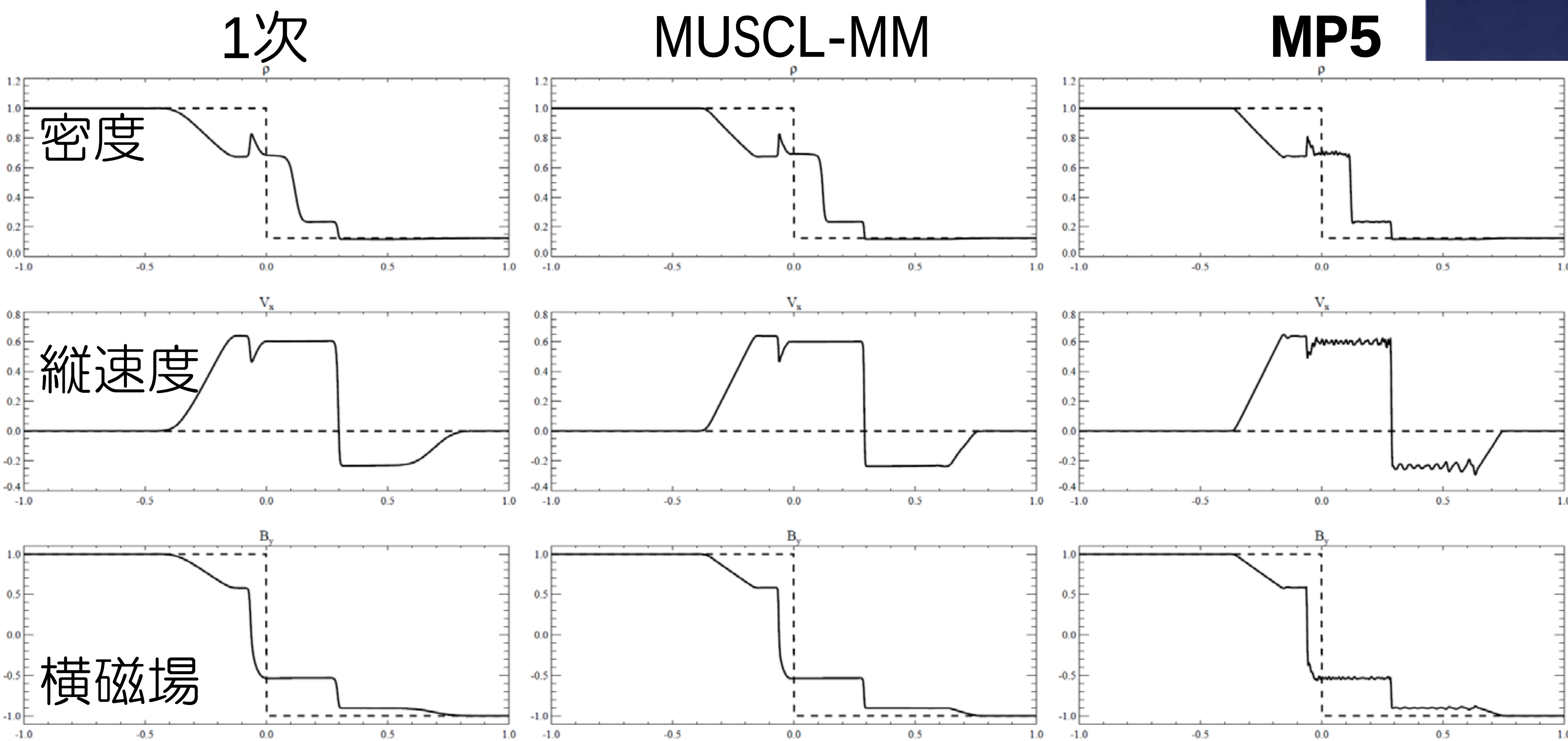
$$\mathbf{U}^L_{i+1/2} = \mathrm{MUSCL}(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}),$$

- 5次精度

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2} = \mathrm{MP}(\mathbf{U}_{i-2}, \mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_{i+2}).$$

衝撃波管問題（Brio+ 1988）





HLLD近似リーマン解法使用（Miyoshi+ 2005）

双曲型保存則の性質

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{A}_p\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}=0,\quad \left(\mathbf{A}=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}\right),$$ ヤコビアン行列

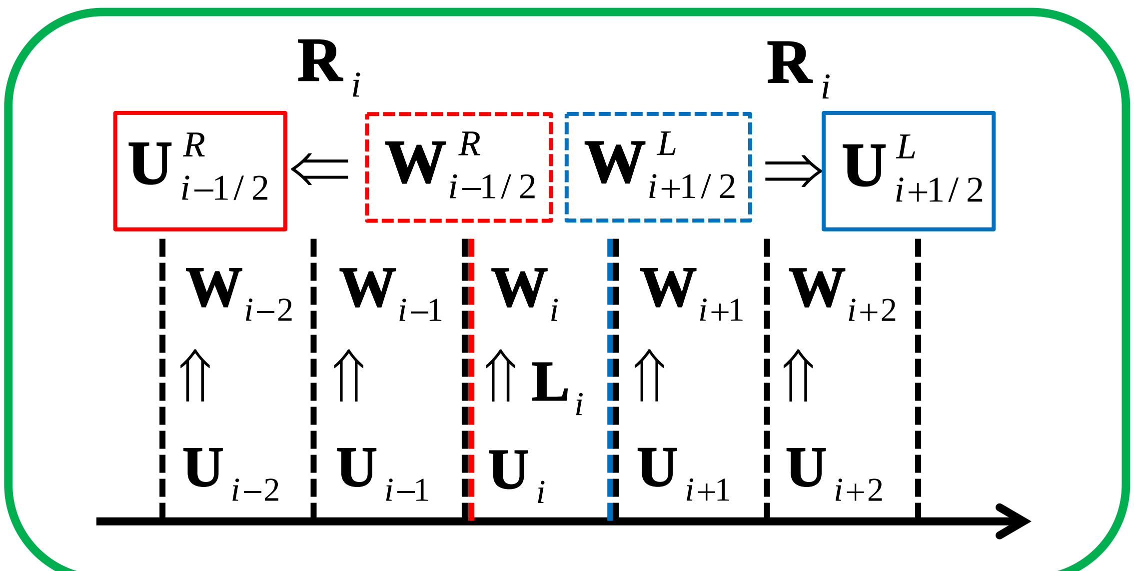
$$\Rightarrow \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{LARL}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}=\mathbf{L}_p\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{L}_p\mathbf{A}_p\mathbf{R}_p\mathbf{L}_p\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}=0,\quad (\mathbf{LR}=\mathbf{L}_p\mathbf{R}_p=\mathbf{1}),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}=0,\quad (d\mathbf{W}=\mathbf{L}d\mathbf{U}=\mathbf{L}_p d\mathbf{V},\mathbf{\Lambda}=\mathbf{LAR}).$$ 非線形移流方程式

- 方程式の対角化
  - $\mathbf{L},\mathbf{R}$: $\mathbf{A}$の左右固有ベクトルを成分とする左右固有行列
  - $\mathbf{\Lambda}$: 実数固有値を成分とする対角行列
- 特性量$d\mathbf{W}$は$\mathbf{\Lambda}$に沿って一定（リーマン不変量）
- 風上法に基づく補間は特性量に対して行いたい

特性変数変換

- 左右固有行列$\mathbf{L}_i$,$\mathbf{R}_i$(e.g., Ryu+ 1995)
- 特性変数変換: $\mathbf{W}_{i+s}=\mathbf{L}_i\mathbf{U}_{i+s}$, ($s$=-2,...,2 for MP5)
- $\boxed{\mathbf{W}^L_{i+1/2},}\ \boxed{\mathbf{W}^R_{i-1/2},}$ を補間で求める
- 逆変換: $\boxed{\mathbf{U}^L_{i+1/2}=\mathbf{R}_i\mathbf{W}^L_{i+1/2},}\ \boxed{\mathbf{U}^R_{i-1/2}=\mathbf{R}_i\mathbf{W}^R_{i-1/2}}$



特性変数変換

- 固有行列を計算するのが面倒
  - MHDでは固有値の縮退
  - プログラムミス多発!!
- 固有行列が明らかでない系では使えない
- CANS+に実装済み

基本変数に対する固有行列（Stone+98）

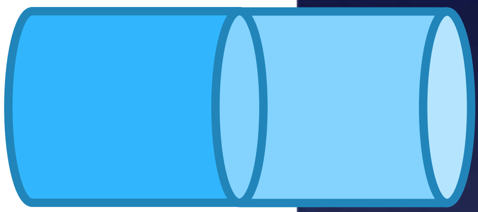
$$
\mathbf{L} = \begin{bmatrix}
0 & -N_f C_{ff} & N_f Q_s \beta_y & N_f Q_s \beta_z & N_f \alpha_f/\rho & N_f A_s \beta_y/\rho & N_f A_s \beta_z/\rho \\
0 & 0 & -\beta_z/2 & \beta_y/2 & 0 & -\beta_z S/(2\sqrt{\rho}) & \beta_y S/(2\sqrt{\rho}) \\
0 & -N_s C_{ss} & -N_s Q_f \beta_y & -N_s Q_f \beta_z & N_s \alpha_s/\rho & -N_s A_f \beta_y/\rho & -N_s A_f \beta_z/\rho \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1/a^2 & 0 & 0 \\
0 & N_s C_{ss} & N_s Q_f \beta_y & N_s Q_f \beta_z & N_s \alpha_s/\rho & -N_s A_f \beta_y/\rho & -N_s A_f \beta_z/\rho \\
0 & 0 & \beta_z/2 & -\beta_y/2 & 0 & -\beta_z S/(2\sqrt{\rho}) & \beta_y S/(2\sqrt{\rho}) \\
0 & N_f C_{ff} & -N_f Q_s \beta_y & -N_f Q_s \beta_z & N_f \alpha_f/\rho & N_f A_s \beta_y/\rho & N_f A_s \beta_z/\rho
\end{bmatrix}
\quad
\mathbf{R} = \begin{bmatrix}
\rho\alpha_f & 0 & \rho\alpha_s & 1 & \rho\alpha_s & 0 & \rho\alpha_f \\
-C_{ff} & 0 & -C_{ss} & 0 & C_{ss} & 0 & C_{ff} \\
Q_s\beta_y & -\beta_z & -Q_f\beta_y & 0 & Q_f\beta_y & \beta_z & -Q_s\beta_y \\
Q_s\beta_z & \beta_y & -Q_f\beta_z & 0 & Q_f\beta_z & -\beta_y & -Q_s\beta_z \\
\rho a^2\alpha_f & 0 & \rho a^2\alpha_s & 0 & \rho a^2\alpha_s & 0 & \rho a^2\alpha_f \\
A_s\beta_y & -\beta_z S\sqrt{\rho} & -A_f\beta_y & 0 & -A_f\beta_y & -\beta_z S\sqrt{\rho} & A_s\beta_y \\
A_s\beta_z & \beta_y S\sqrt{\rho} & -A_f\beta_z & 0 & -A_f\beta_z & \beta_y S\sqrt{\rho} & A_s\beta_z
\end{bmatrix}
$$

$$
C_{ff} = C_f\alpha_f, \quad C_{ss} = C_s\alpha_s, \qquad \alpha_f^2 = \frac{a^2 - C_s^2}{C_f^2 - C_s^2}, \quad \alpha_s^2 = \frac{C_f^2 - a^2}{C_f^2 - C_s^2}, \qquad N_f = N_s = \frac{1}{2a^2}
$$

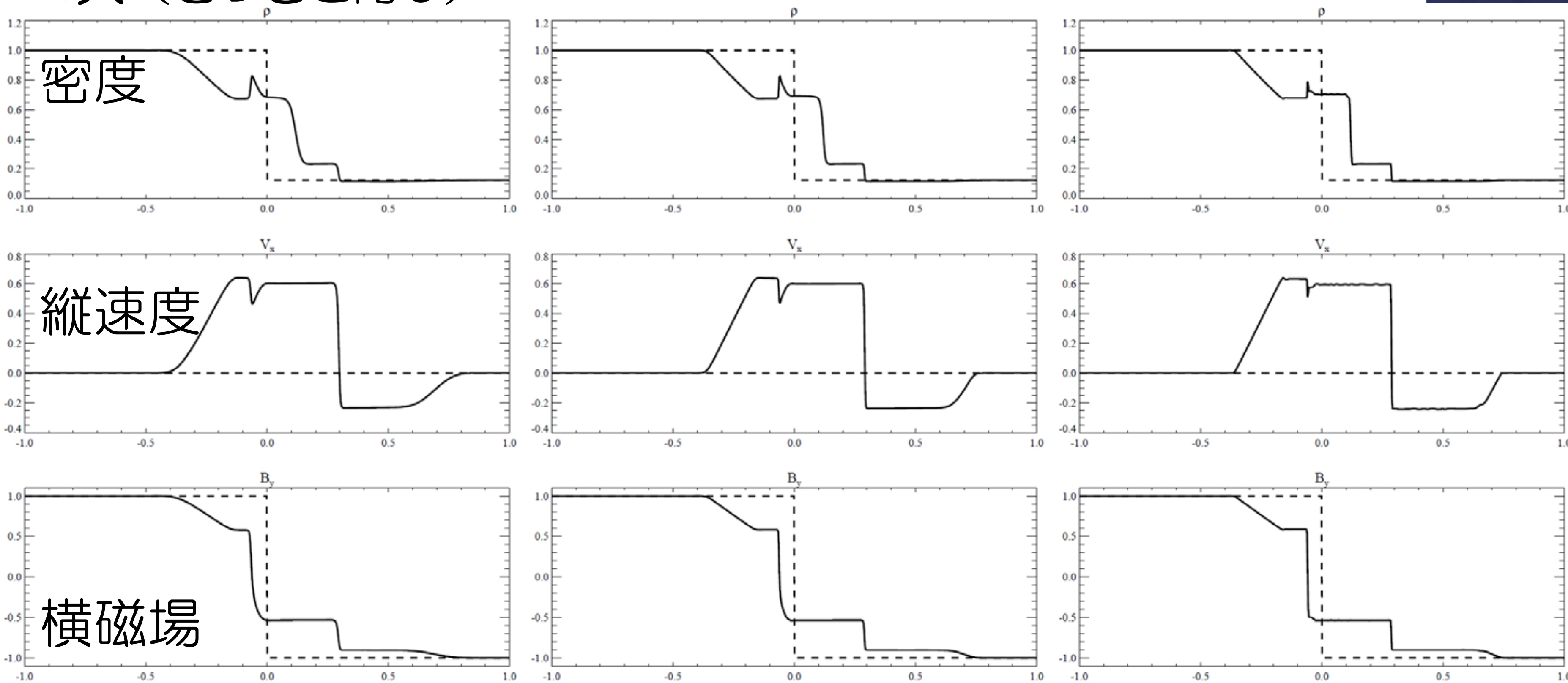
$$
Q_f = C_f\alpha_f S, \quad Q_s = C_s\alpha_s S,
$$

$$
A_f = a\alpha_f\sqrt{\rho}, \quad A_s = a\alpha_s\sqrt{\rho}, \qquad \beta_y = \frac{b_y}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}, \quad \beta_z = \frac{b_z}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}.
$$

衝撃波管問題（Brio+ 1988）



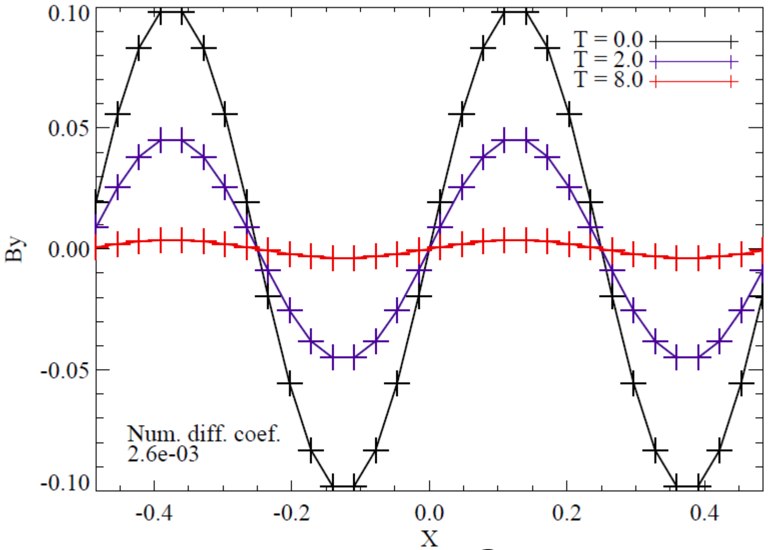
1次（さっきと同じ）　MUSCL-MM　**MP5**



HLLD, 特性変数変換

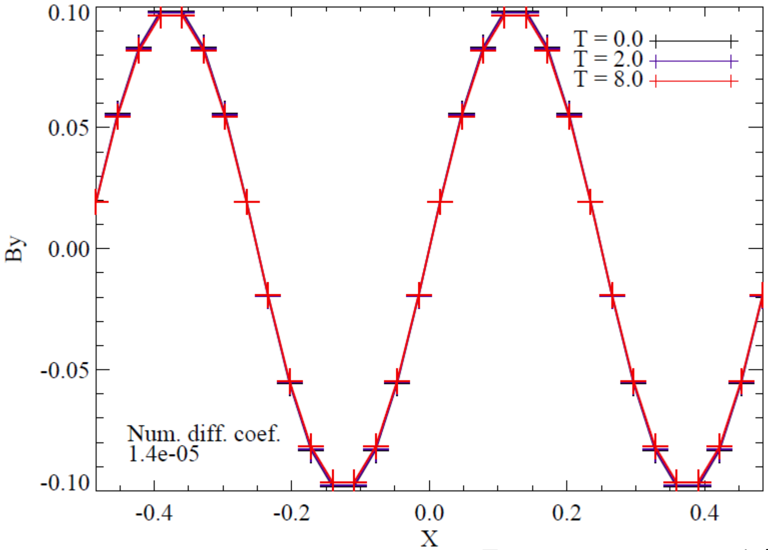
アルフベン波：2次 vs. 5次

MUSCL-MM



$\eta = 2.6\times 10^{-3}$

MP5



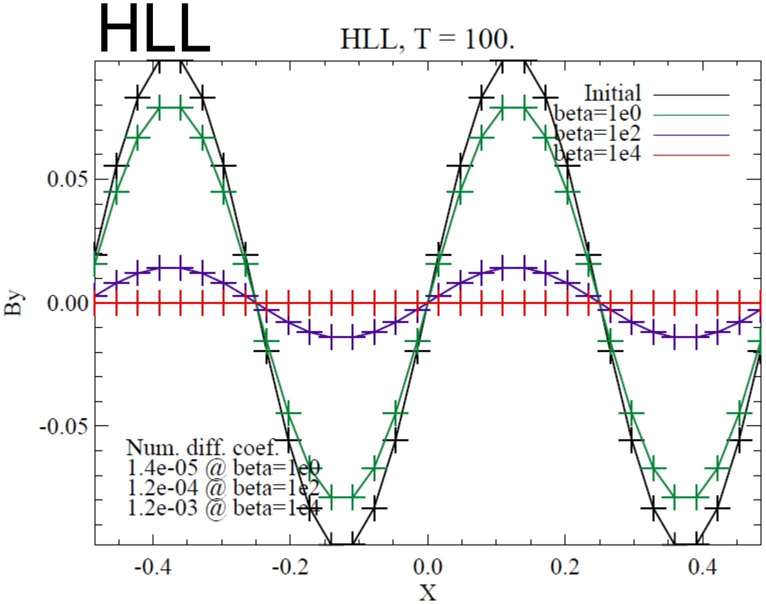
$\eta = 1.4\times 10^{-5}$

HLLD使用

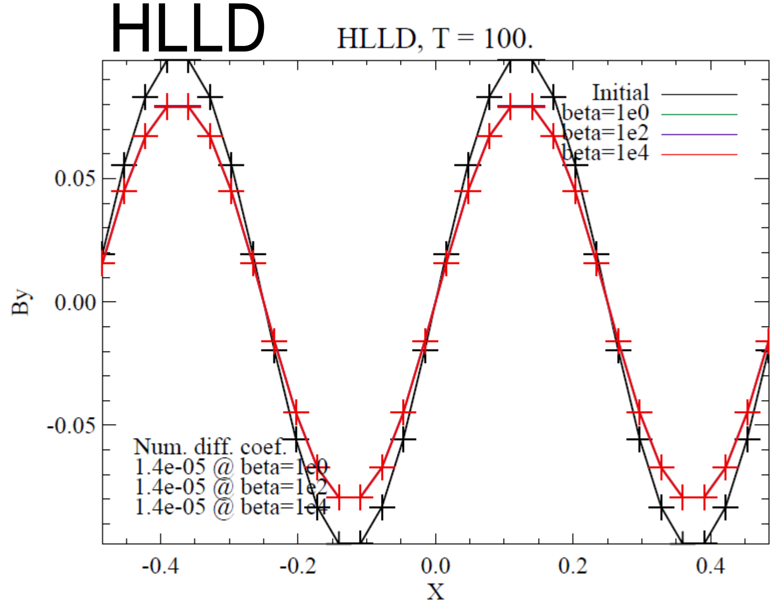
- プラズマ中で情報を伝える**非圧縮性波動**
- 高次精度化で数値減衰を軽減

アルフベン波：HLL vs. HLLD

HLL



HLLD



Diff. coefficient	HLL	HLLD
β=1e0	1.4e-5	1.4e-5
β=1e2	1.2e-4	1.4e-5
β=1e4	1.2e-3	1.4e-5

$$\eta_{HLL} \approx \left(C_f - V_A\right)\Delta x \propto \beta^{1/2}$$

- ガス圧>>磁気圧の場合は<u>高解像度リーマンソルバ</u>が重要（Minoshima+15）

2次元理想MHD方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=0,$$

$$\mathbf{U}=\left(\rho,\rho u,\rho v,\rho w,B_x,B_y,B_z,e\right)^T,$$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho uu-B_xB_x+p+\mathbf{B}^2/2\\ \rho vu-B_xB_y\\ \rho wu-B_xB_z\\ 0\\ B_yu-B_xv\\ B_zu-B_xw\\ \left(e+p+\mathbf{B}^2/2\right)u-B_x\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}\right)\end{pmatrix},\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv-B_yB_x\\ \rho vv-B_yB_y+p+\mathbf{B}^2/2\\ \rho wv-B_yB_z\\ B_xv-B_yu\\ 0\\ B_zv-B_yw\\ \left(e+p+\mathbf{B}^2/2\right)v-B_y\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}\right)\end{pmatrix}.$$

MHDコードの多次元化

U: 保存量ベクトル
F: *X*方向の流束ベクトル
G: *Y*方向の流束ベクトル

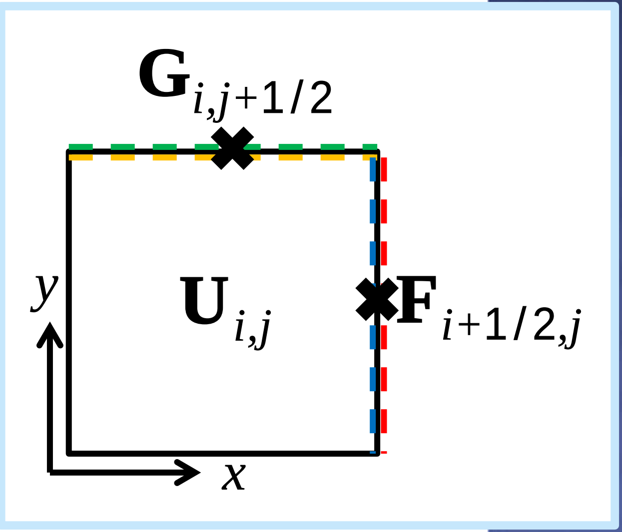
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt}=-\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j}-\mathbf{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x}-\frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2}-\mathbf{G}_{i,j-1/2}}{\Delta y}.$$

- 1次元数値解法の利用

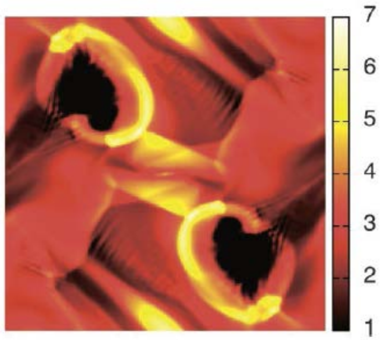
$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^{L}_{i+1/2,j},\mathbf{U}^{R}_{i+1/2,j}),$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^{L}_{i,j+1/2},\mathbf{U}^{R}_{i,j+1/2}),$$

  - 同じタイミングで求めるUnsplit法



- 磁場発散の処理



数値的なdiv**B**≠0で計算破綻（三好，2014）

磁場発散の処理

- Constrained Transport (CT) 法（Evans+ 1988）
  - div**B**=0を離散化レベルで保証する特殊なグリッド配置
- Central Difference (CD) 法（Toth 2000）
  - 磁場について中心差分法

- プロジェクション法（Brackbill+ 1980）
  - ポアソン方程式を解いて磁場修正
- **移流拡散法**（Powell 1999, Dedner+ 2002）
  - 有限のdiv**B**を移流拡散方程式や電信方程式で処理

http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id23

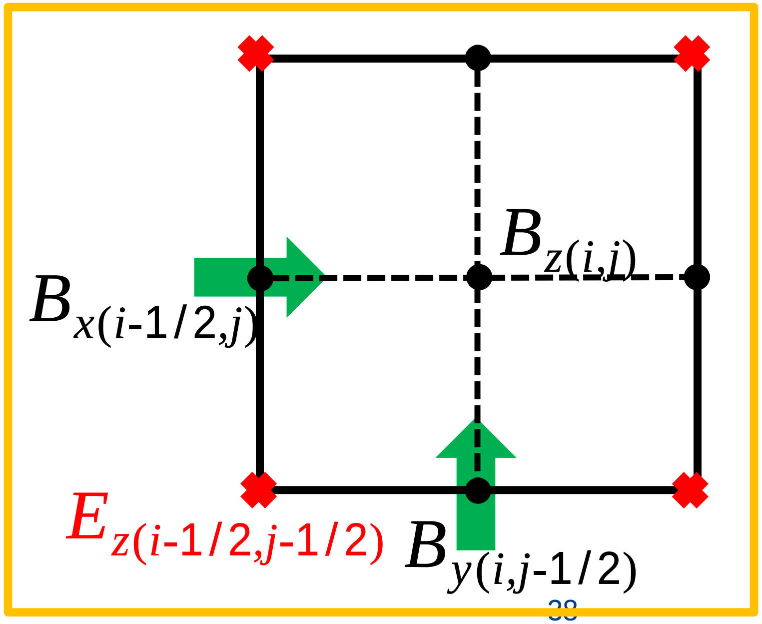
プロジェクション法/CT法

- プロジェクション法

$$\boxed{\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^{*} + \nabla \phi, \;\Rightarrow\; \Delta \phi = -\nabla \cdot \mathbf{B}^{*}.}$$

  - $\mathbf{B}^*$: MHDシミュレーションで得た解（div**B**誤差有）
  - $\mathbf{B}^{n+1}$: div**B**=0を満たす真の解
  - ポアソン方程式解いてϕ得る => $\mathbf{B}^*$を$\mathbf{B}^{n+1}$へ更新

- CT法
  - セル境界面中心に垂直磁場を配置
  - セル角の電場を求める（e.g., Balsara+99）
  - $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}.$



移流拡散法（CANS+に実装）

- **9-wave法**（Dedner+ 2002）
  - div$\mathbf{B}$を掃除するため方程式を修正

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \phi$$

  - $\mathbf{B}$とϕについて整理すると…電信方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c_h^2}{c_p^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] (\nabla \cdot \mathbf{B}) = c_h^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}),$$

- 実装しやすく計算負荷も少ない

移流拡散法

- 1次元の場合

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(c_h^2/c_p^2)\phi \end{pmatrix},$$

演算子分離

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = 0,}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -(c_h^2/c_p^2)\phi,$$

固有値（伝播速度）$\pm c_h$

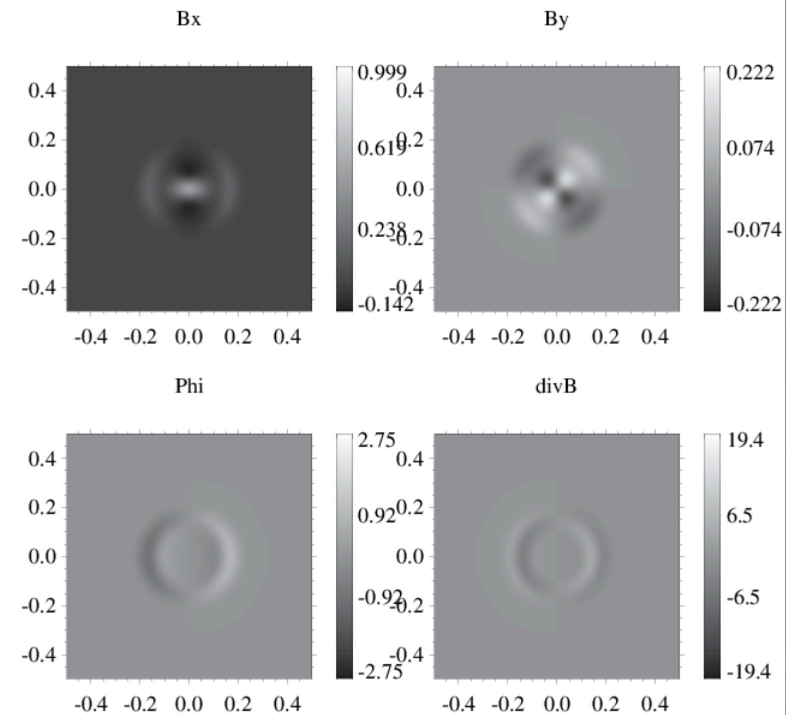
$$\boxed{\phi^* = \exp[-(c_h^2/c_p^2)\Delta t]\phi^n,}$$

c_h: CFL条件から決める最大値

c_p: $(0.18c_h)^{(1/2)}$（経験的な値）

移流拡散法

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = 0,
$$

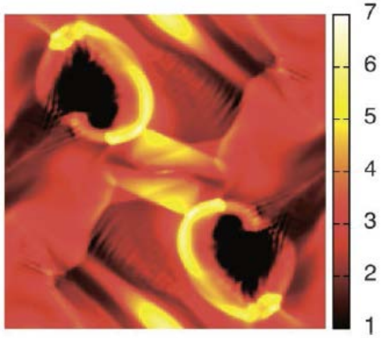


- Lax-Friedrichs flux splitting

$$
\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\phi^L_{i+1/2} + \phi^R_{i+1/2}\right) - \frac{c_h}{2}\left(B^R_{x,i+1/2} - B^L_{x,i+1/2}\right),
$$

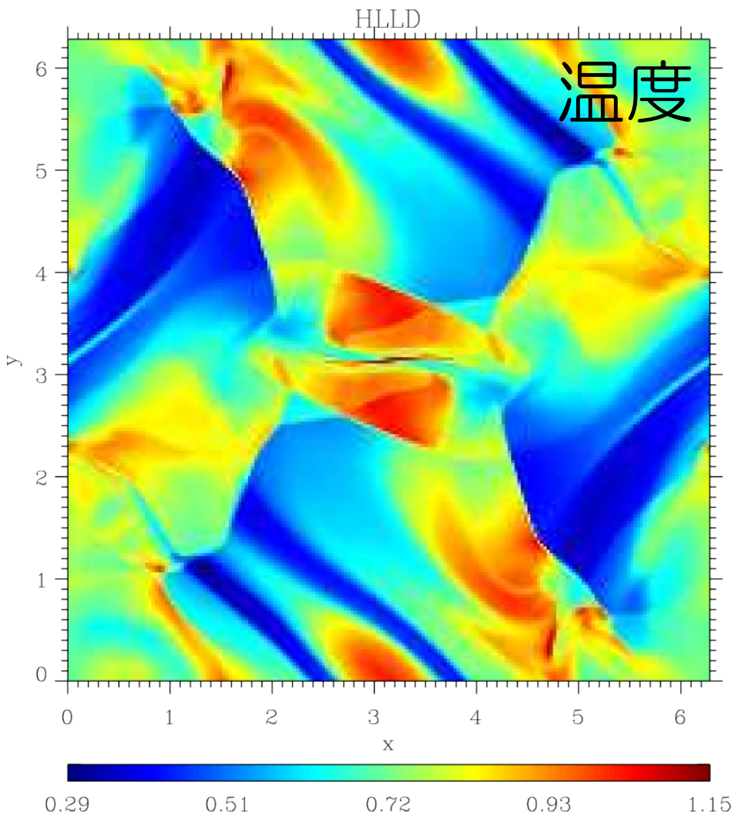
$$
c_h^2 B_{x,i+1/2} = \frac{c_h^2}{2}\left(B^L_{x,i+1/2} + B^R_{x,i+1/2}\right) - \frac{c_h}{2}\left(\phi^R_{i+1/2} - \phi^L_{i+1/2}\right).
$$

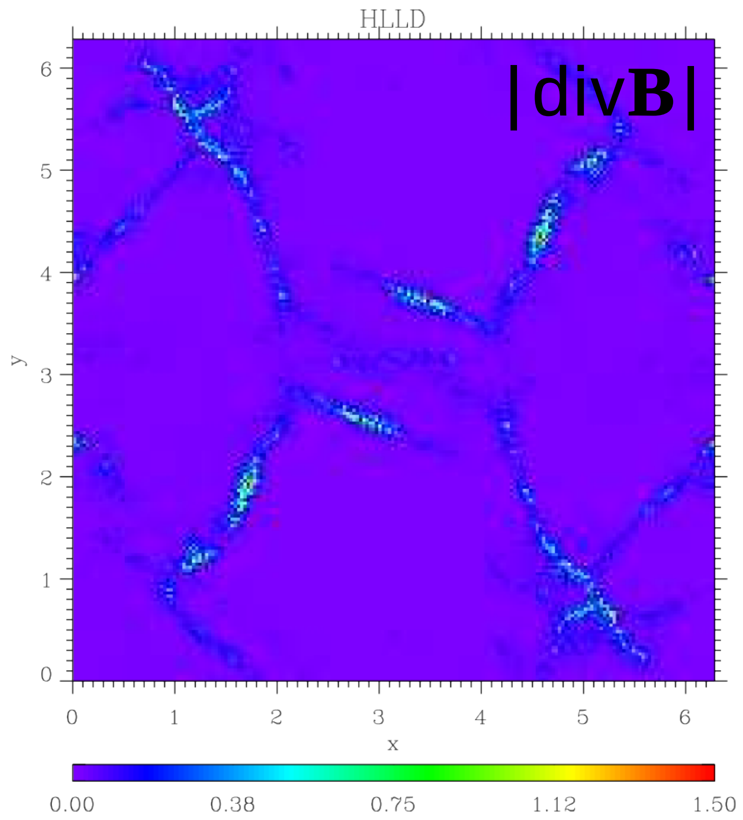
divB≠0 ケアしないと…



2D MHD with 9-wave

- Orszag-Tang 渦問題

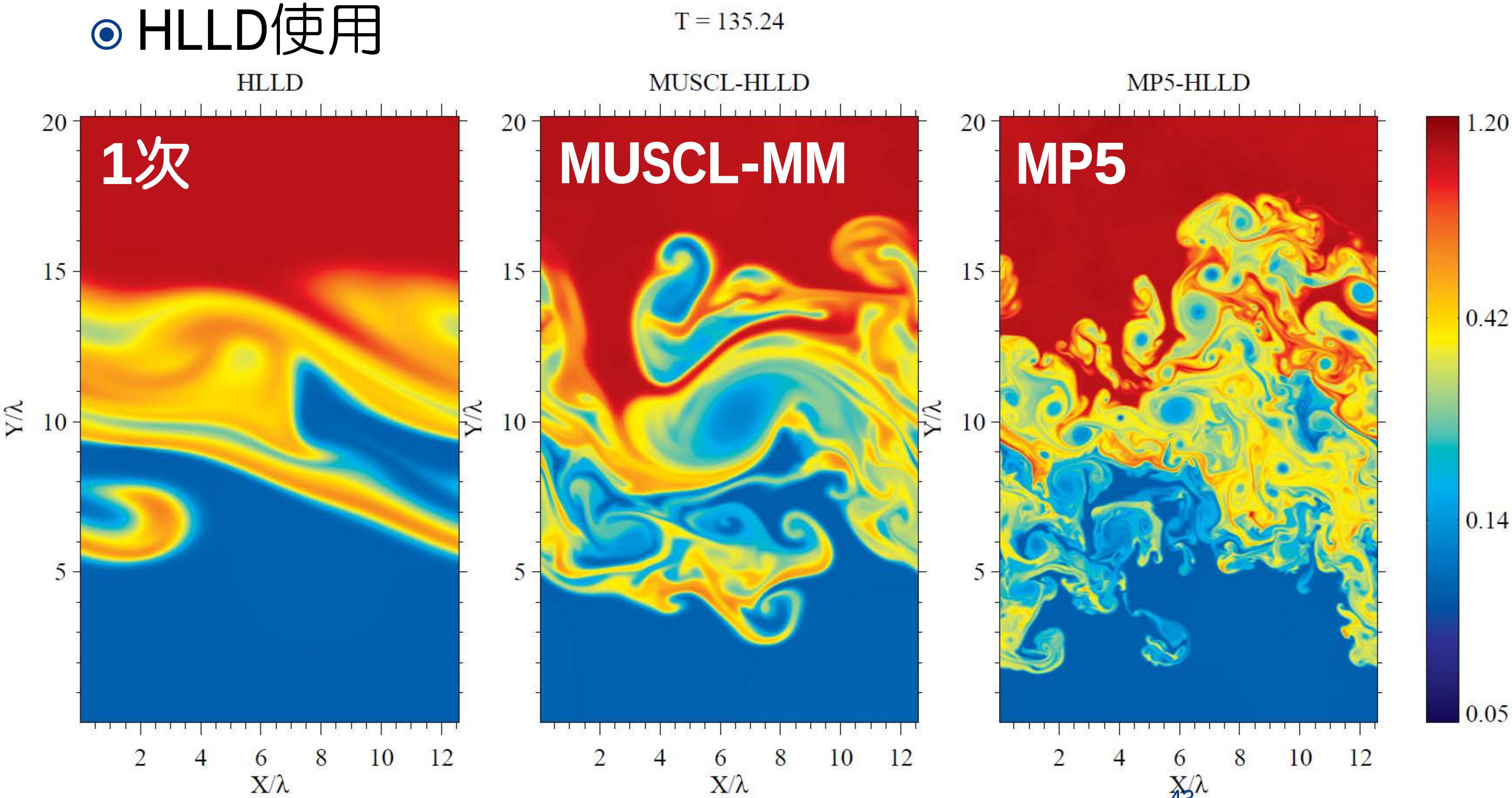




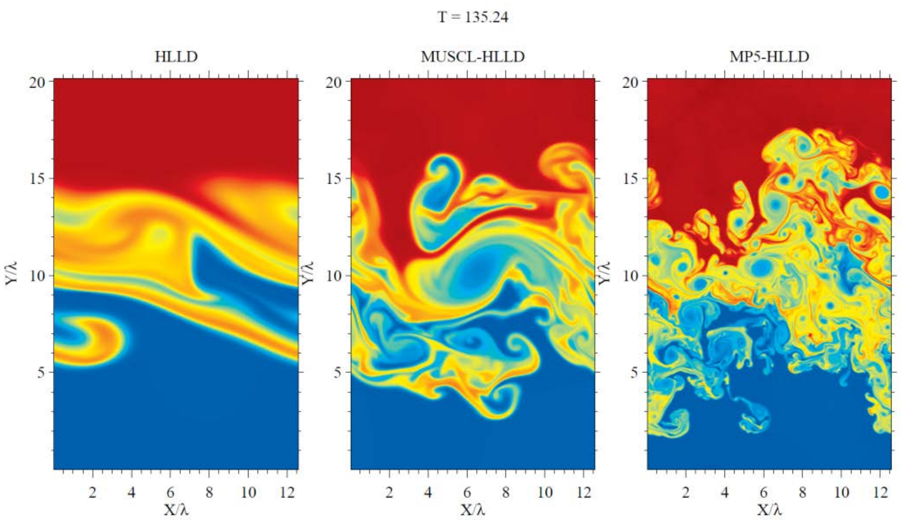
http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id23

ケルビン・ヘルムホルツ不安定

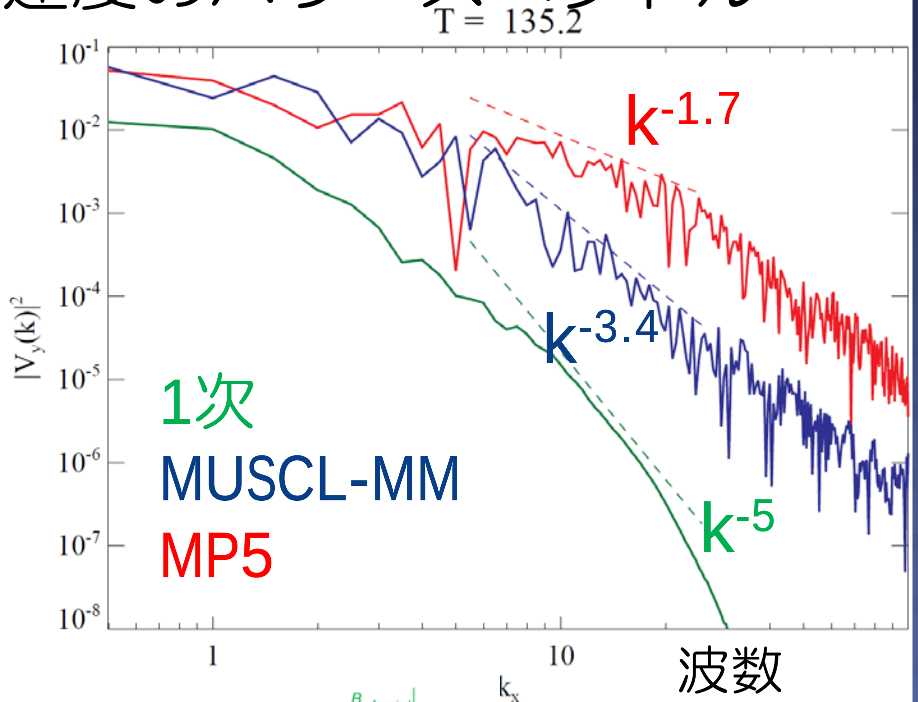
- 速度差がある流体の間で発生する不安定
- HLLD使用



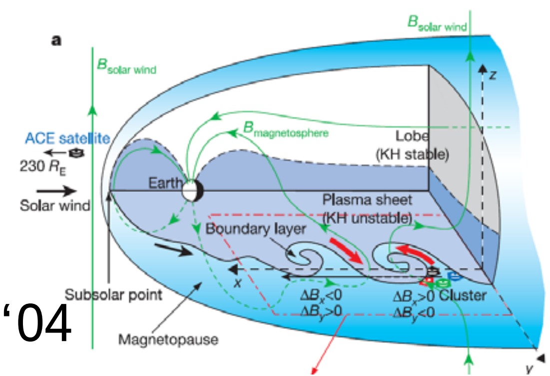
ケルビン・ヘルムホルツ不安定



速度のパワースペクトル



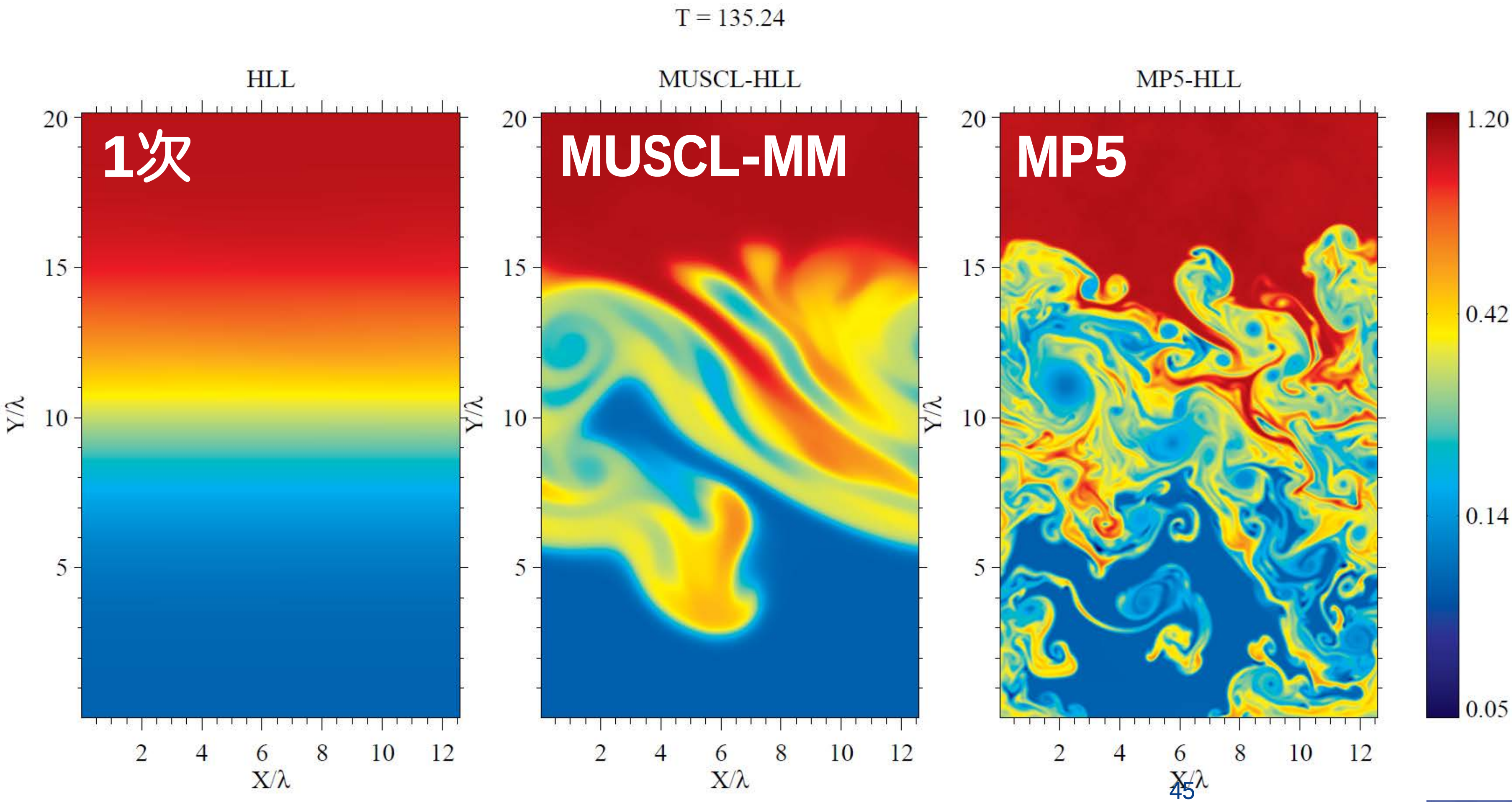
- 2次的不安定で乱流発展（Matsumoto+ ‘06）
- 物質混合の促進
  - 太陽風-磁気圏相互作用シナリオ

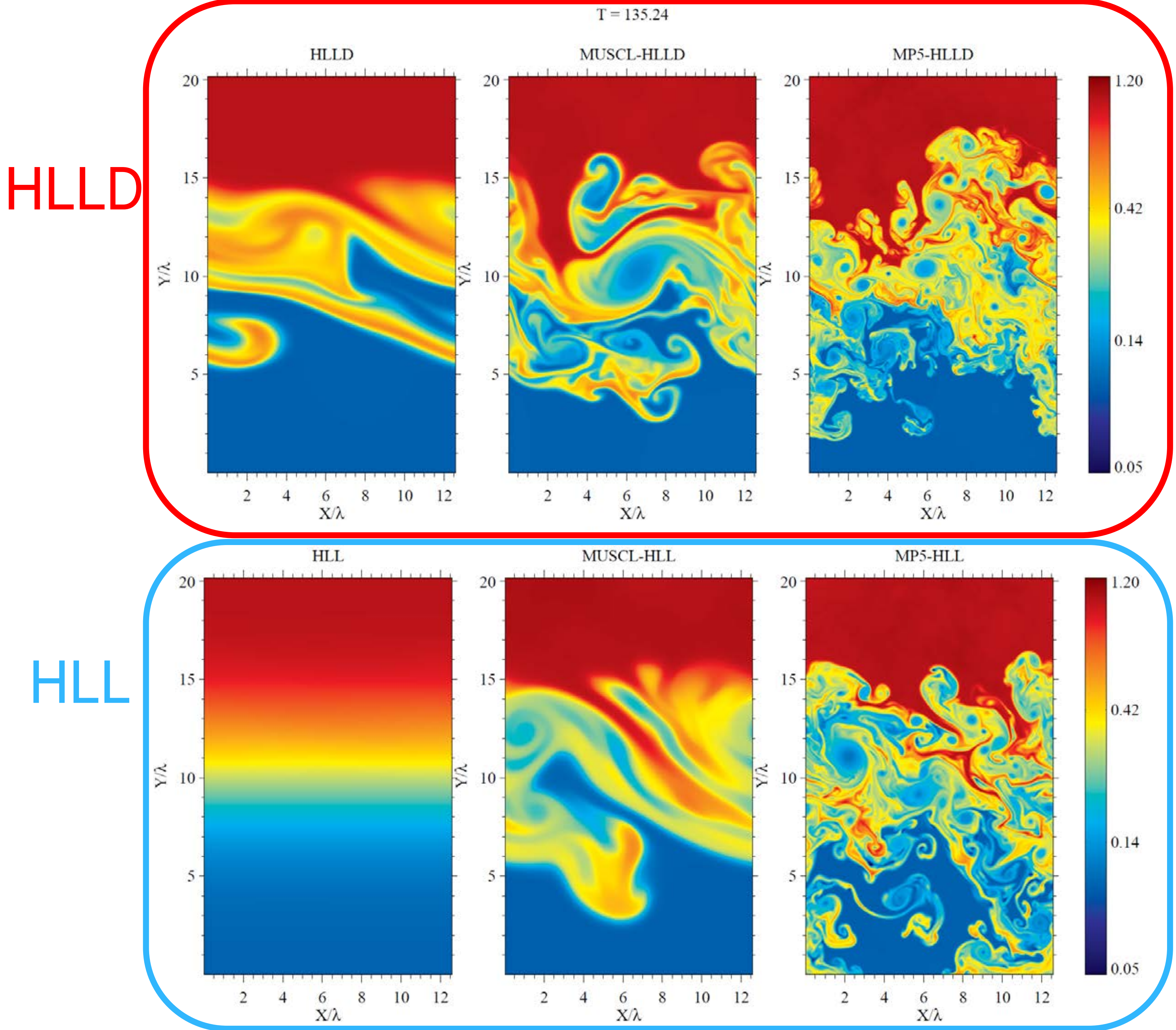


Hasegawa+ ‘04

ケルビン・ヘルムホルツ不安定

- HLL使用（接触不連続を解像しない）




HLLD
HLL
T = 135.24
HLLD
MUSCL-HLLD
MP5-HLLD
HLL
MUSCL-HLL
MP5-HLL
Y/λ
X/λ
1.20
0.42
0.14
0.05

まとめ

- 実用的なMHDシミュレーションのためには、**高次精度化**と**多次元化**は必須!!

- **高次精度化**
  - 数値振動を抑制する**非線形補間**
  - 特性変数変換
  - リーマンソルバの選択も重要
- **多次元化**
  - 1次元数値解法の利用
  - **磁場発散**の処理（CT, プロジェクション, 移流拡散法）