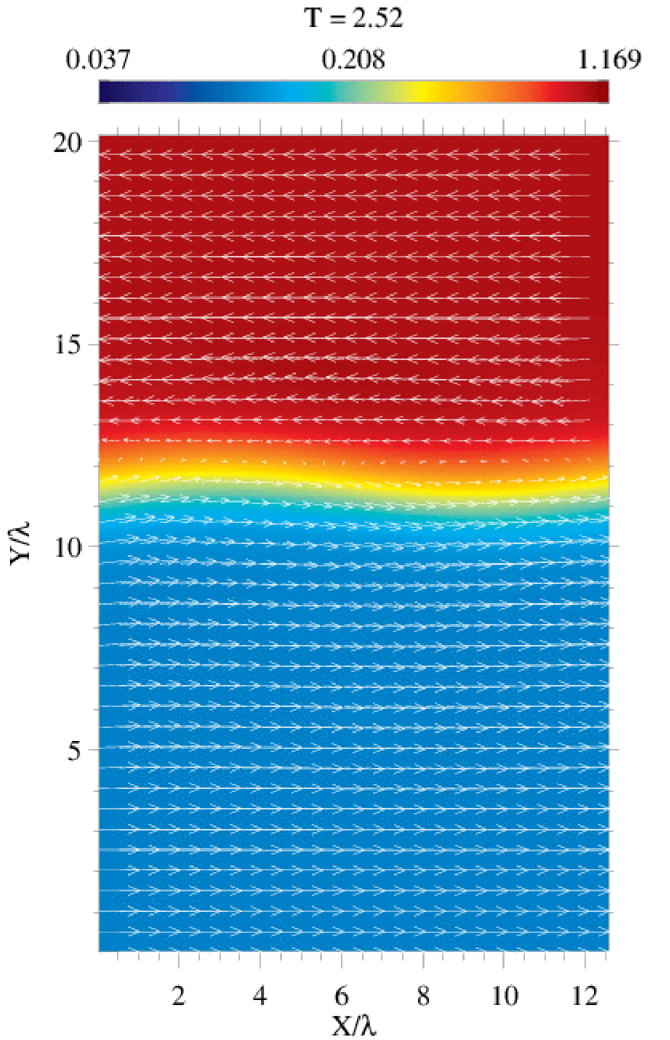
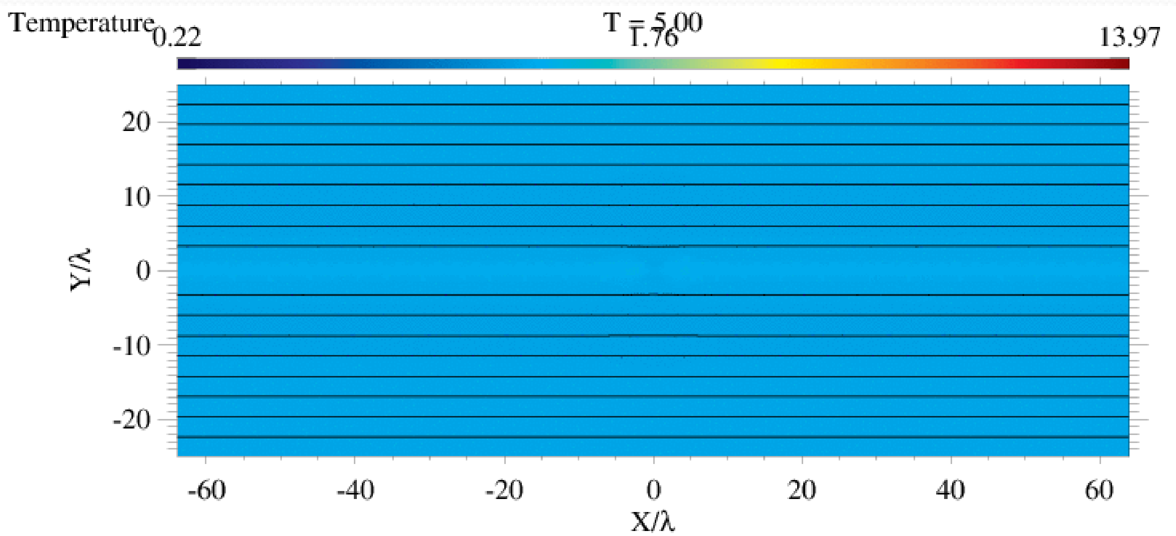
MHDシミュレーションの高次精度化と多次元化

簑島　敬（海洋研究開発機構）

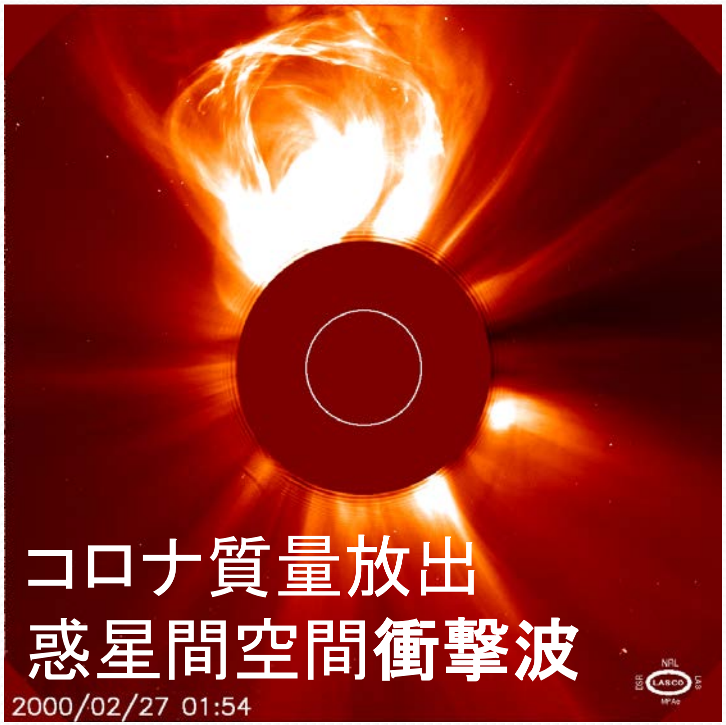
今日の内容

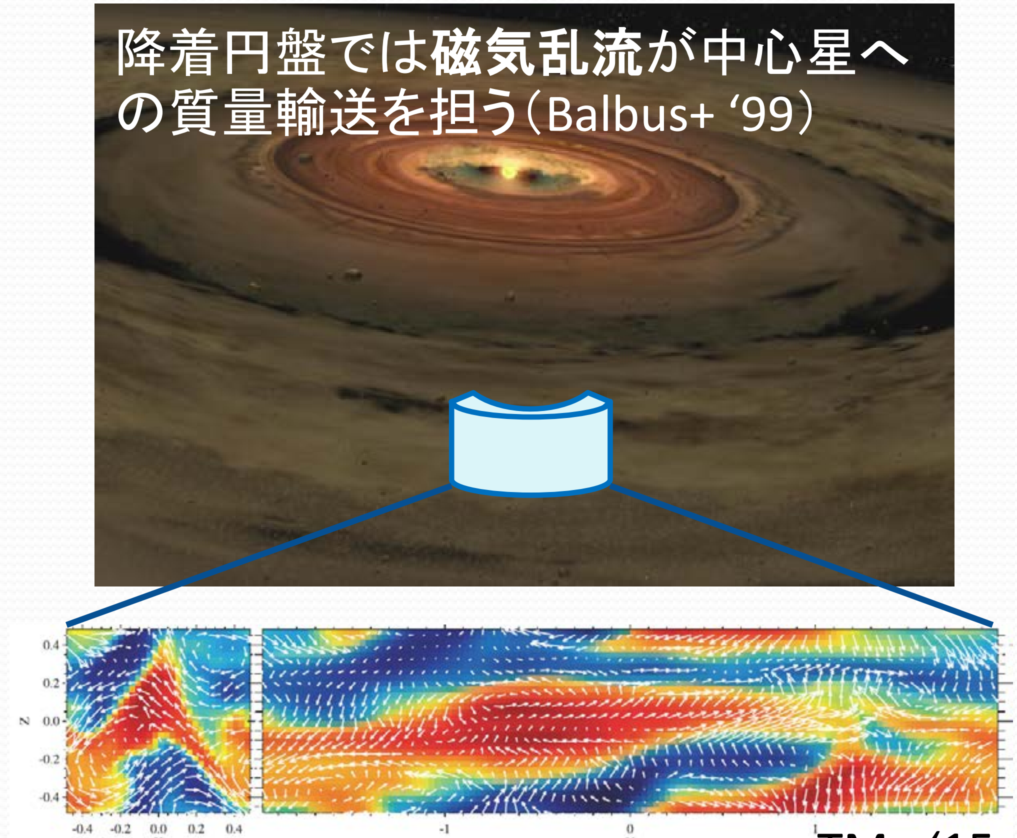




- **高解像度シミュレーションに必要な技術を学ぶ**

宇宙流体





TM+ '15

- 高速流、非一様性、圧縮性 => **衝撃波**
- 希薄、低粘性、低電気抵抗 => **乱流**

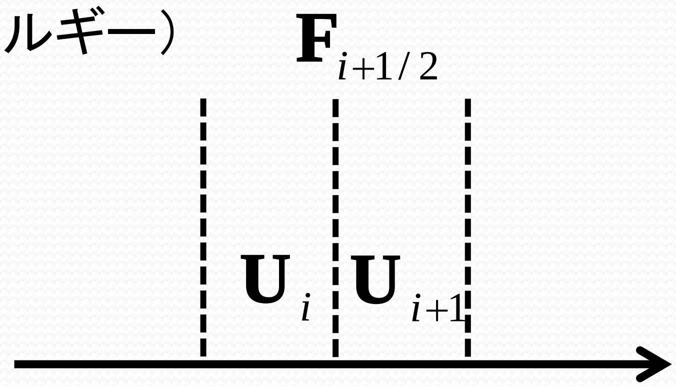
MHDシミュレーションの基本

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=0, \;\Rightarrow\; \mathbf{U}_i^{n+1}=\mathbf{U}_i^{n}-\Delta t\frac{\mathbf{F}_{i+1/2}-\mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

$\mathbf{U}$: 保存量ベクトル（密度、運動量、磁場、エネルギー）

$\mathbf{F}$: 流束ベクトル

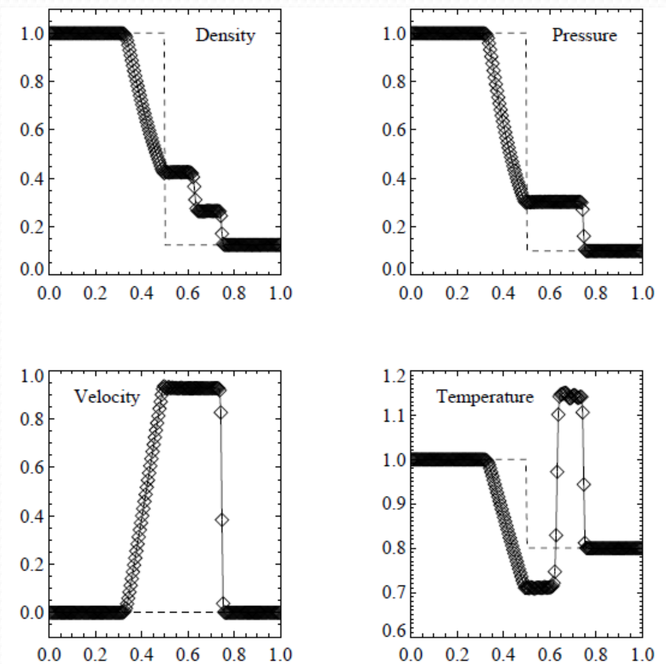
$$\mathbf{F}_{i+1/2}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}_i,\mathbf{U}_{i+1}).$$

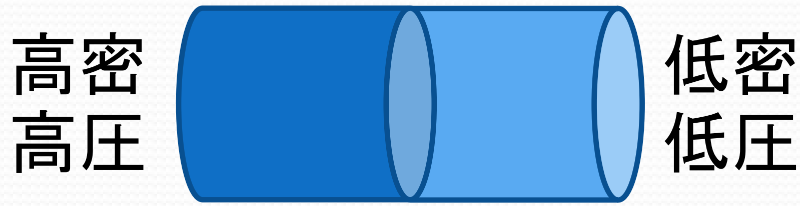


Riemann: 衝撃波管問題を解く（近似）

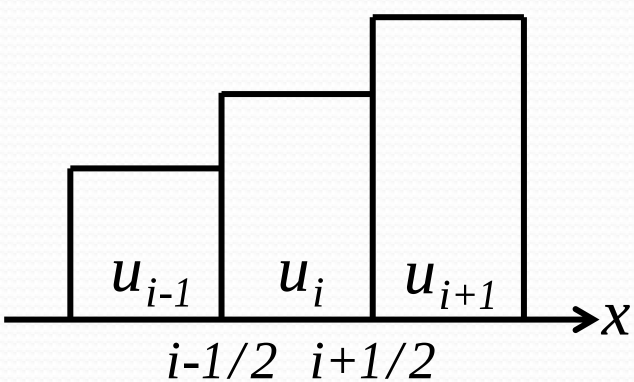
リーマンソルバ。Roe, HLL, HLLD, など

衝撃波管問題とリーマンソルバ





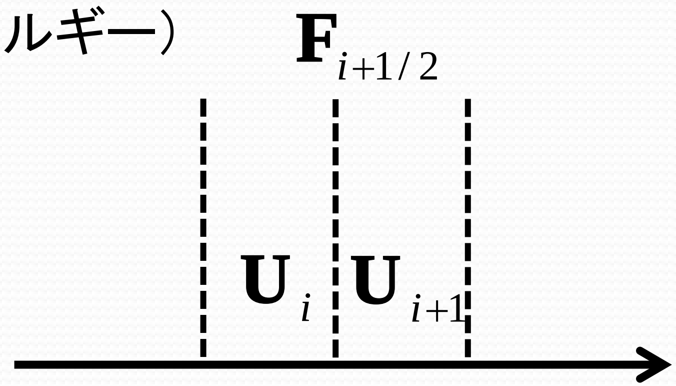
- **衝撃波管問題**:異なる状態の流体を仕切りで分けておき、仕切りを取り去った後の状態を求める物理問題
- **リーマンソルバ**:セルi, $i+1$を異なる状態、$i+1/2$を仕切りとみなして、衝撃波管問題を解く数値手法



MHDシミュレーションの実用化

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_i^{n+1}=\mathbf{U}_i^{n}-\Delta t\,\frac{\mathbf{F}_{i+1/2}-\mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

U: 保存量ベクトル（密度、運動量、磁場、エネルギー）
F: 流束ベクトル



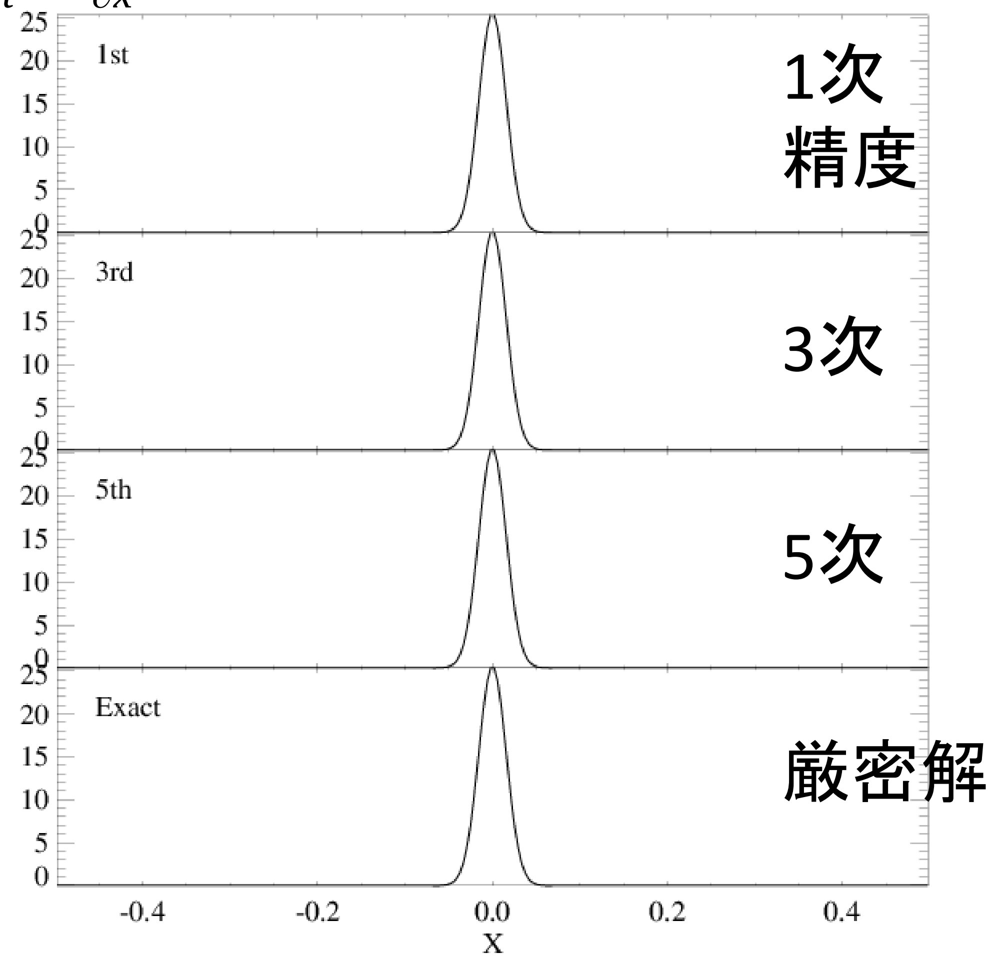
$$\mathbf{F}_{i+1/2}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}_i,\mathbf{U}_{i+1}).$$

（↑Roe, HLL, HLLD法など）

- 今日の話は……**実用化**
  - **高次精度化**
  - **多次元化** → $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z}=0$

高次精度化とは

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \mathrm{const}) \quad T = 0.00$$



- **物理量プロファイルを高次関数で近似(補間)し、高解像度の解を得る**

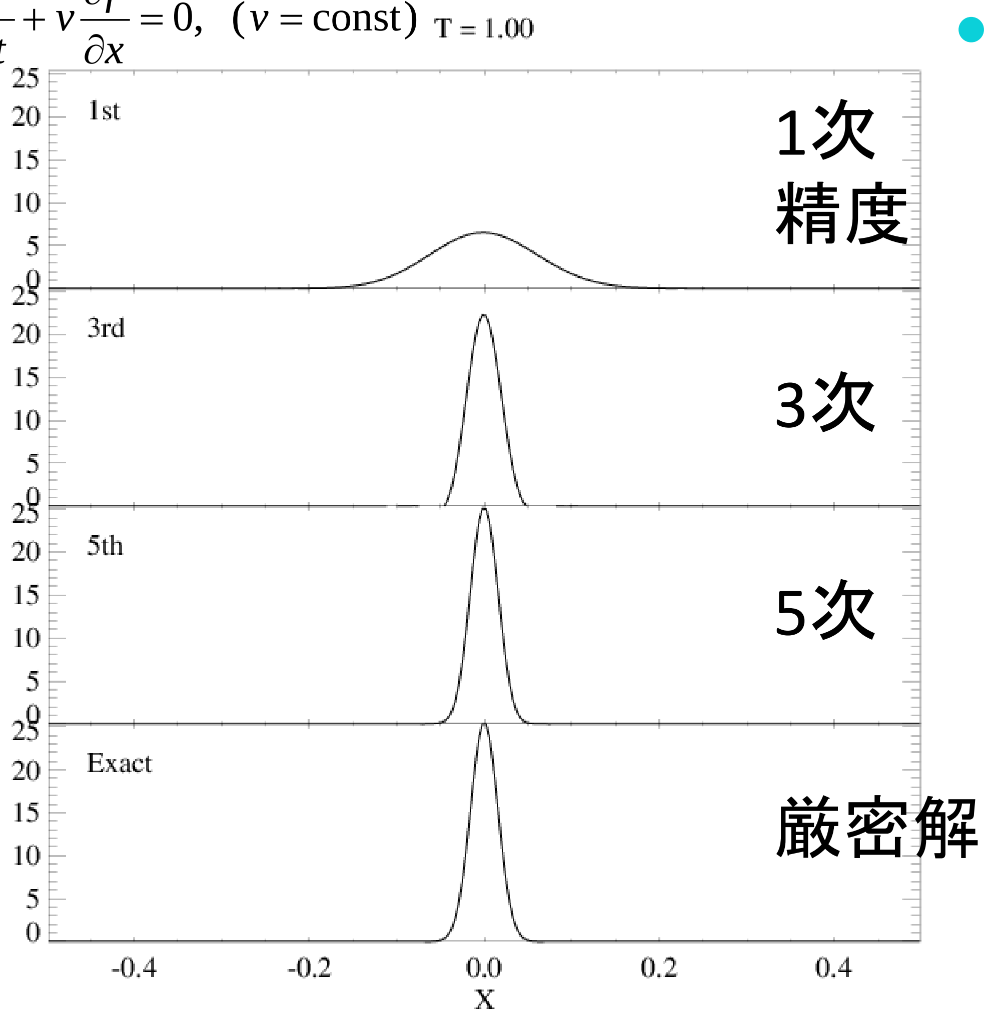
$$f(\Delta x) \sim f(0) + f'(0)\Delta x, \leftarrow 1次$$

$$f(\Delta x) \sim f(0) + f'(0)\Delta x + f''(0)\Delta x^2/2 + f'''(0)\Delta x^3/6,$$

↑3次

高次精度化とは

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad (v=\mathrm{const})$$



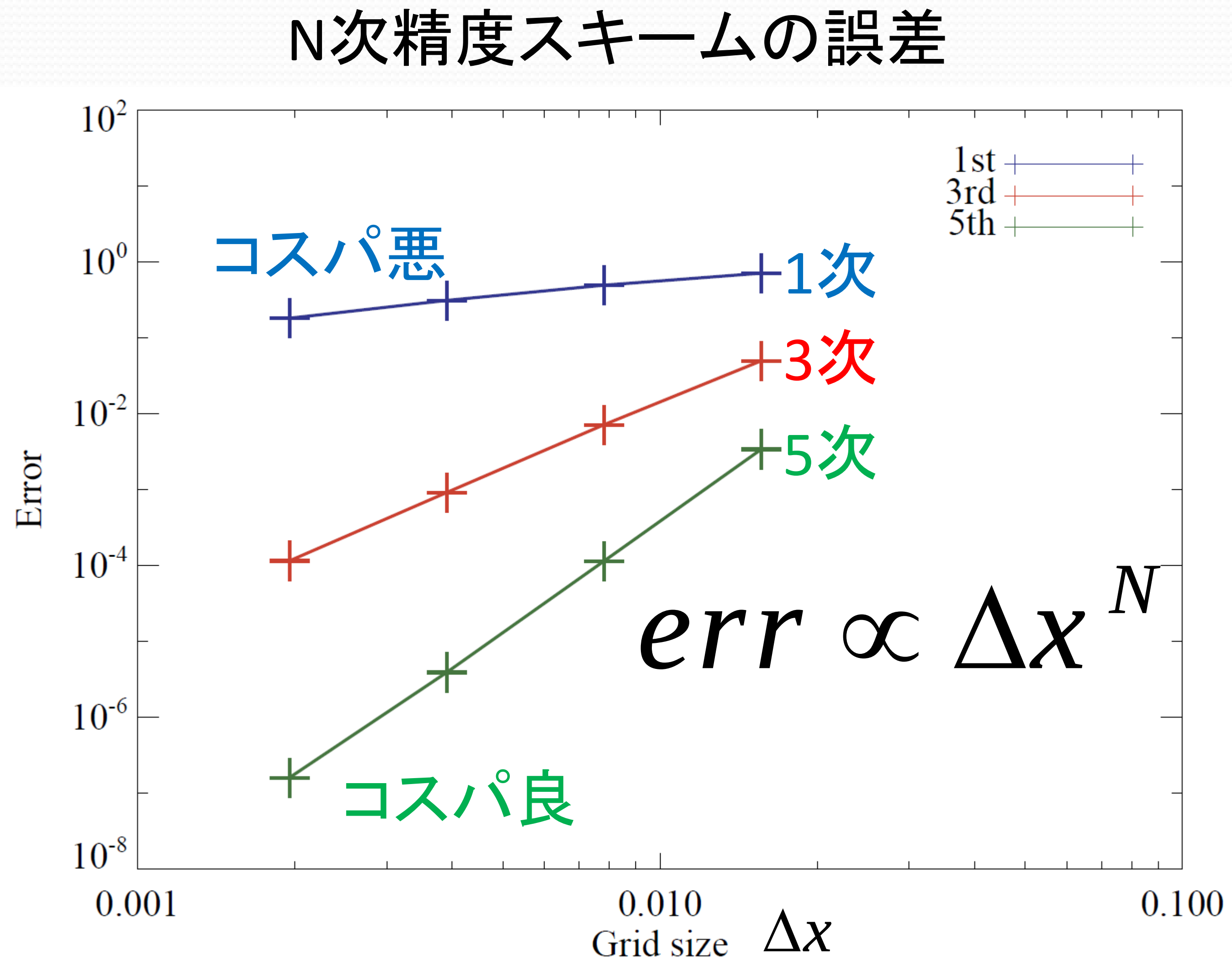
- **物理量プロファイルを高次関数で近似(補間)し、高解像度の解を得る**

$f(\Delta x)\sim f(0)+f'(0)\Delta x,$ ←1次

$$f(\Delta x)\sim f(0)+f'(0)\Delta x + f''(0)\Delta x^2/2+f'''(0)\Delta x^3/6,$$

↑3次

高次精度化の必要性


N次精度スキームの誤差
10^2
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
Error
0.001
0.010
0.100
Grid size
Δx
1st
3rd
5th
コスパ悪
1次
3次
5次
コスパ良
$err \propto \Delta x^{N}$

スカラー方程式の高次精度化例

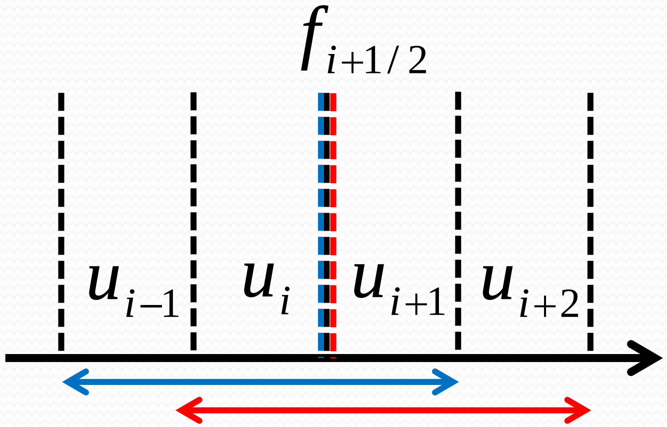
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad f=cu \Rightarrow \quad \frac{du_i}{dt}=-\frac{f_{i+1/2}-f_{i-1/2}}{\Delta x}.}$$

c=一定

例：線形3次精度

$$u^L_{i+1/2}=\left(-u_{i-1}+5u_i+2u_{i+1}\right)/6$$

$$u^R_{i+1/2}=\left(-u_{i+2}+5u_{i+1}+2u_i\right)/6$$



$$f_{i+1/2}=\begin{cases} cu^L_{i+1/2}, & \text{if } c>0 \\ cu^R_{i+1/2}, & \text{if } c\le 0 \end{cases}$$

風上の値を用いる(これもリーマンソルバ)

流体シミュレーションの高次精度化例

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}_i}{dt}=-\frac{\mathbf{F}_{i+1/2}-\mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

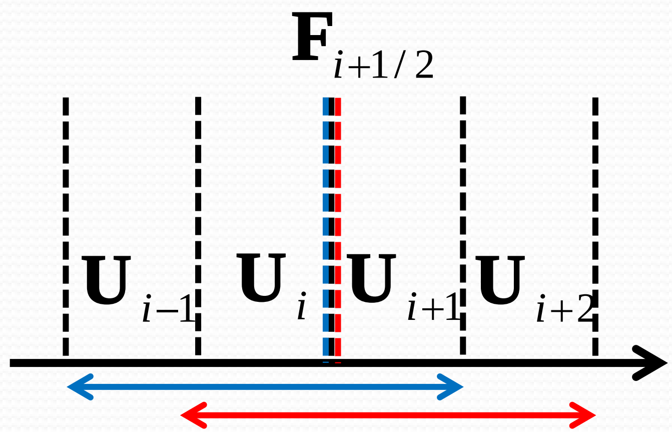
U: 保存量ベクトル
F: 流束ベクトル

例:線形3次精度

$$\mathbf{U}^{L}_{i+1/2}=\left(-\mathbf{U}_{i-1}+5\mathbf{U}_{i}+2\mathbf{U}_{i+1}\right)/6$$

$$\mathbf{U}^{R}_{i+1/2}=\left(-\mathbf{U}_{i+2}+5\mathbf{U}_{i+1}+2\mathbf{U}_{i}\right)/6$$

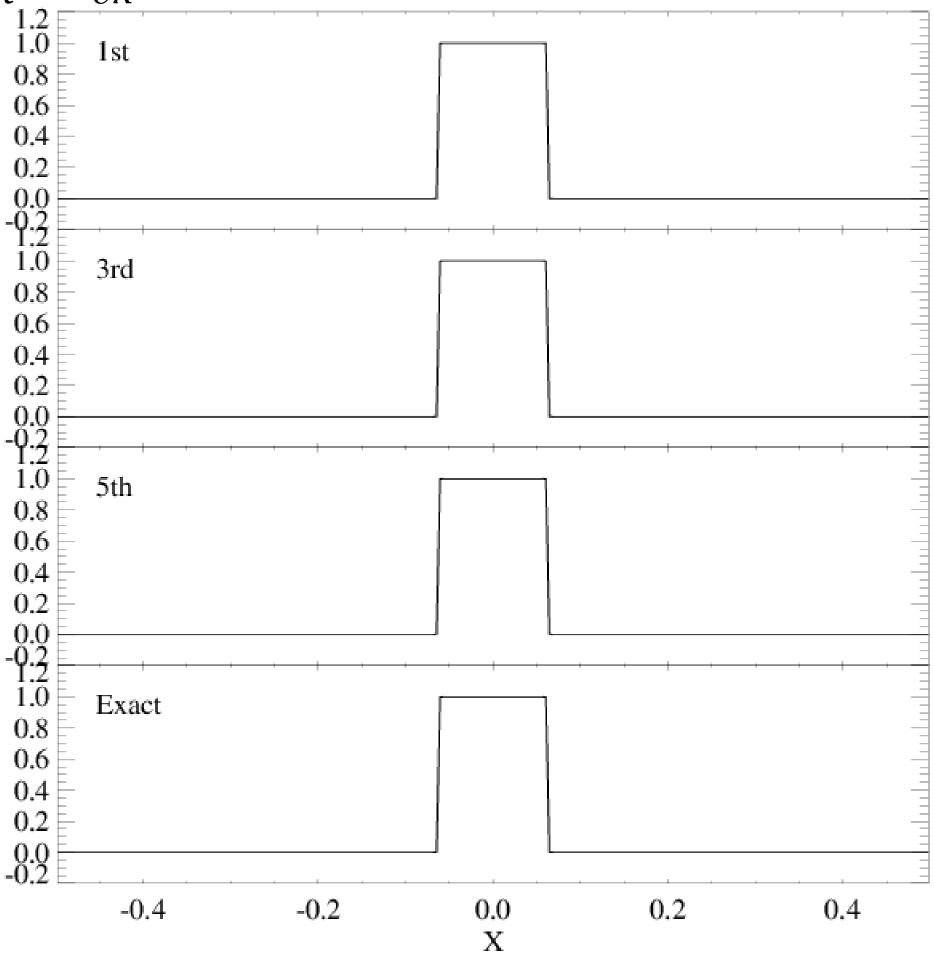
$$\mathbf{F}_{i+1/2}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^{L}_{i+1/2},\mathbf{U}^{R}_{i+1/2}).$$



線形N次精度化は、流体シミュレーションではおすすめしません

高次精度化の欠点

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \mathrm{const})$$



1次精度

3次

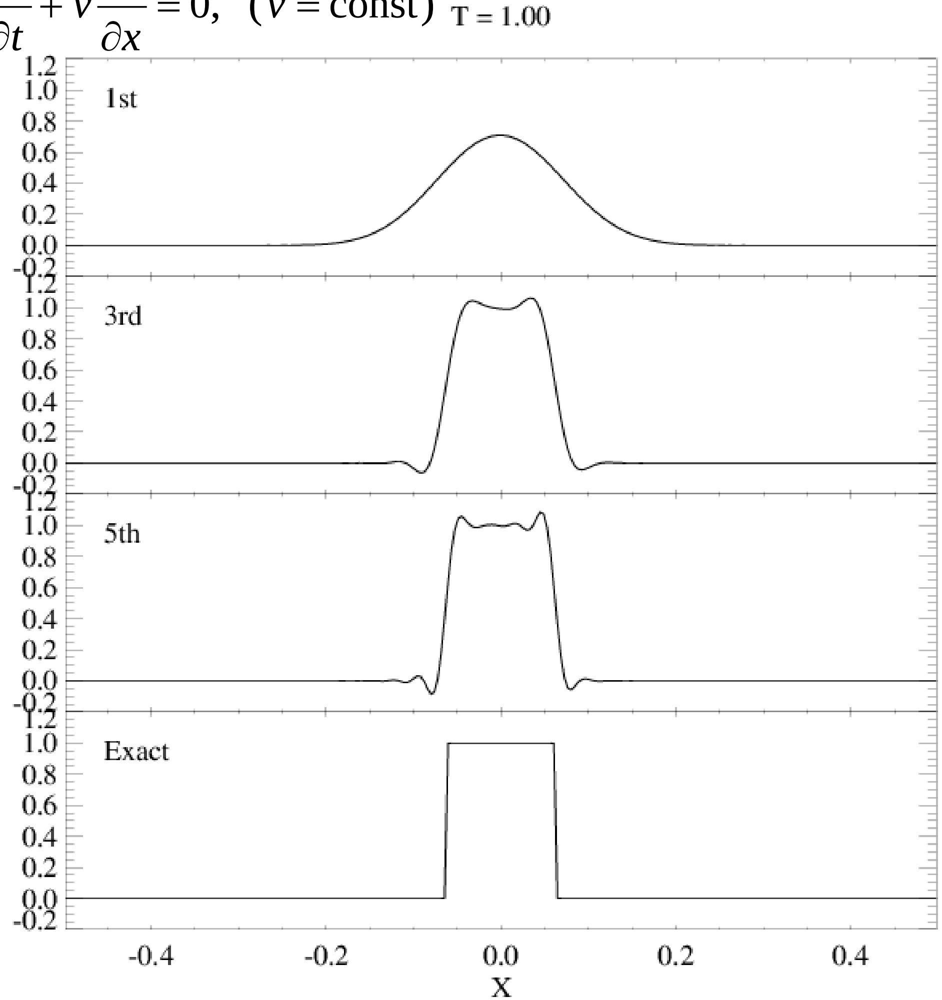
5次

厳密解

- 不連続面近傍の<u>数値振動</u>
- 「<u>線形2次以上スキーム</u>は解の単調性を維持できない」（Godunovの定理）
- 非線形スキームの導入

高次精度化の欠点

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \mathrm{const})$$



1次精度

3次

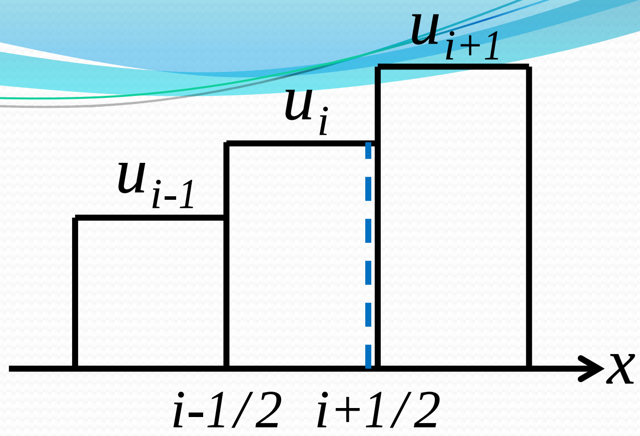
5次

厳密解

- 不連続面近傍の<u>数値振動</u>
- 「線形2次以上スキームは解の単調性を維持できない」（Godunovの定理）
- 非線形スキームの導入

非線形スキーム

- **場所によって精度が異なる**



$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{L} = \left(-\mathbf{U}_{i-1} + 5\mathbf{U}_{i} + 2\mathbf{U}_{i+1}\right)/6$$

線形スキーム
係数がどこでも-1:5:2

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{L} = \left(c_i^L \mathbf{U}_{i-1} + c_i^C \mathbf{U}_{i} + c_i^R \mathbf{U}_{i+1}\right).$$

非線形スキーム
周囲の状況に応じて c_i を適切に決める

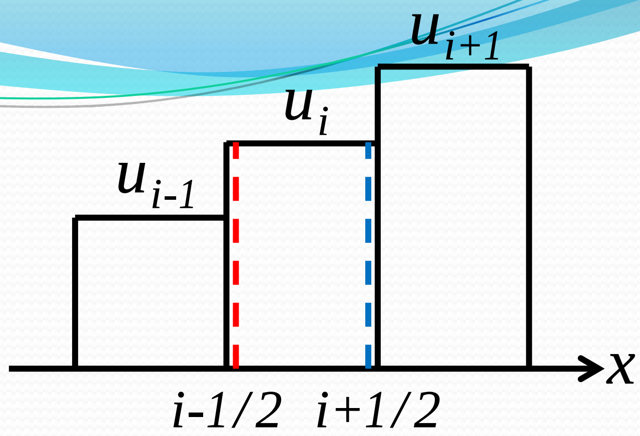
非線形スキーム

- **低精度**@不連続面付近（**衝撃波**）
- **高精度**@滑らかな領域（**乱流**）

- **M**onotone **U**pstream-centered **S**chemes for **C**onservation **L**aws（**MUSCL**; van Leer 1979）
- **W**eighted **E**ssentially **N**on-**O**scillatory scheme（**WENO**; Jiang+ 1996）
- **M**onotonicity **P**reserving scheme（**MP**; Suresh+ 1997, <u>CANS+に実装</u>）

http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id17

MUSCL法



- セル平均値（既知）

$$u_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x)dx,$$

- テーラー展開に基づくセルi内の分布

$$u(x) = u(x_i) + u_i'(x_i)(x - x_i) + u_i''(x_i)(x - x_i)^2/2 + \dots$$

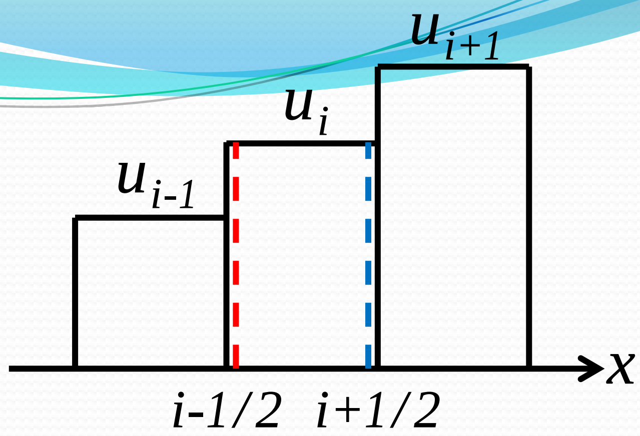
$$\approx u_i + \frac{x - x_i}{2\Delta x}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2}\left[(x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right](u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}),$$

- セル境界値

$$u_{i+1/2}^L = u(x_{i+1/2}) = u_i + \frac{1-\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i),$$

$$u_{i-1/2}^R = u(x_{i-1/2}) = u_i - \frac{1-\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}),$$

MUSCL法



$$u_{i-1} < \underline{u^R_{i-1/2}} < u_i < \underline{u^L_{i+1/2}} < u_{i+1}$$

- 流束制限関数Φの導入
  - 極値の発生を禁止

$$u^L_{i+1/2} = u_i + \frac{1-\kappa}{4}\Phi(r)\left(u_i - u_{i-1}\right) + \frac{1+\kappa}{4}\Phi(1/r)\left(u_{i+1} - u_i\right),$$

$$u^R_{i-1/2} = u_i - \frac{1-\kappa}{4}\Phi(1/r)\left(u_{i+1} - u_i\right) - \frac{1+\kappa}{4}\Phi(r)\left(u_i - u_{i-1}\right),$$

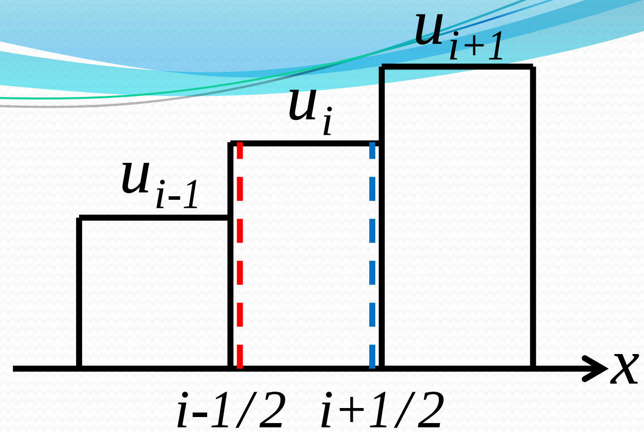
$$r = \left(u_{i+1} - u_i\right)/\left(u_i - u_{i-1}\right),$$

- 代表的な場合: $\Phi(r)=r\,\Phi(1/r)$

$$u^L_{i+1/2} = u_i + \Phi(r)\left(u_i - u_{i-1}\right)/2,$$

$$u^R_{i-1/2} = u_i - \Phi(1/r)\left(u_{i+1} - u_i\right)/2.$$

2次MUSCL法



- 流束制限関数
  - <u>**M**in**M**od</u>

$$\Phi(r) = \max[0, \min(1, r)],$$

$$u^L_{i+1/2} = u_i + du/2, u^R_{i-1/2} = u_i - du/2,$$

$$du = MM(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1}),$$

$$MM(x, y) = \mathrm{sgn}(x)\max[0, \min(|x|, \mathrm{sgn}(x) y)].$$ sgn(x): xの符号

du: セルi内の勾配の候補値の内、<u>最も滑らかなものorゼロ</u>

  - <u>**M**onotonized **C**entral</u>

$$\Phi(r) = \max[0, \min(2r, 0.5(1+r), 2)],$$

$$u^L_{i+1/2} = u_i + du/2, u^R_{i-1/2} = u_i - du/2,$$

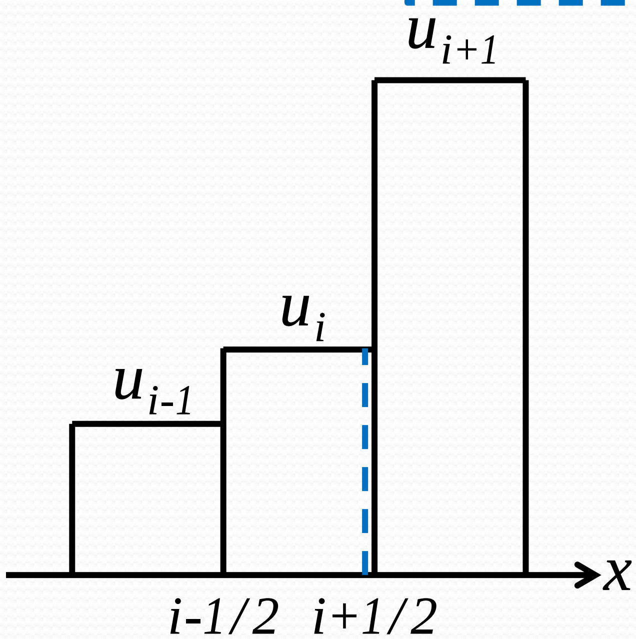
$$du = MC(2(u_{i+1} - u_i), 2(u_i - u_{i-1}), (u_{i+1} - u_{i-1})/2),$$

$$MC(x, y, z) = MM(x, MM(y, z)).$$

MUSCL-MinMod

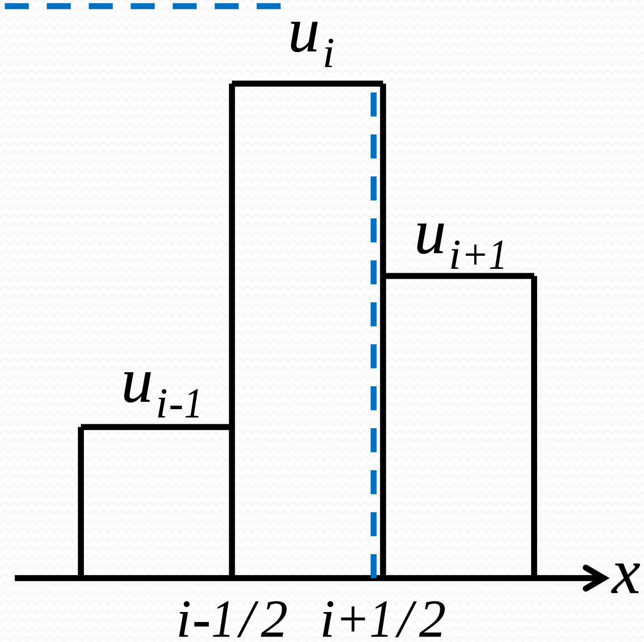
du: セルi内の勾配の候補値の内、最も滑らかなものorゼロ

$$u^{L}_{i+1/2} = u_i + du/2.$$



$$|u_i - u_{i-1}| < |u_{i+1} - u_i|$$

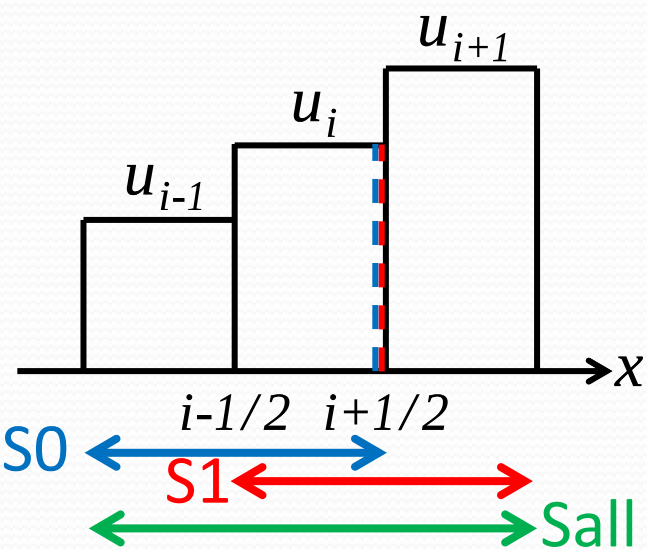
$$\Rightarrow du = u_i - u_{i-1}$$



$$(u_i - u_{i-1})(u_{i+1} - u_i) < 0$$

$$\Rightarrow du = 0$$

3次WENO法



$$\boxed{u^L_{i+1/2} = w_0 u^0_{i+1/2} + w_1 u^1_{i+1/2}}$$

$u^s_{i+1/2}$:各ステンシルでの補間値

$$u^0_{i+1/2} = \left(-u_{i-1} + 3u_i\right)/2,$$

S0

$$u^1_{i+1/2} = \left(u_i + u_{i+1}\right)/2.$$

S1

- 重みwの決め方:プロファイルの「滑らかさ」
  - 不連続を含むステンシルでは小さく (Jiang+ '96; Yamaleev+ '09)
  - 全てのステンシルで同等に滑らかなら、最大精度に収束。 (w_0, w_1)=(1/3,2/3) => $u^L_{i+1/2} = \left(-u_{i-1} + 5u_i + 2u_{i+1}\right)/6$

Sall

時間更新

- 空間精度を上げた際は、時間精度も上げないと数値的に不安定
- **ルンゲ・クッタ法**: $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$

1次

$$y^{n+1} = y^n + f(y^n)\Delta t.$$

2次（2~3次手法で使用）

$$y^* = y^n + f(y^n)\Delta t,$$

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{2} + \frac{1}{2}\left[y^* + f(y^*)\Delta t\right].$$

3次

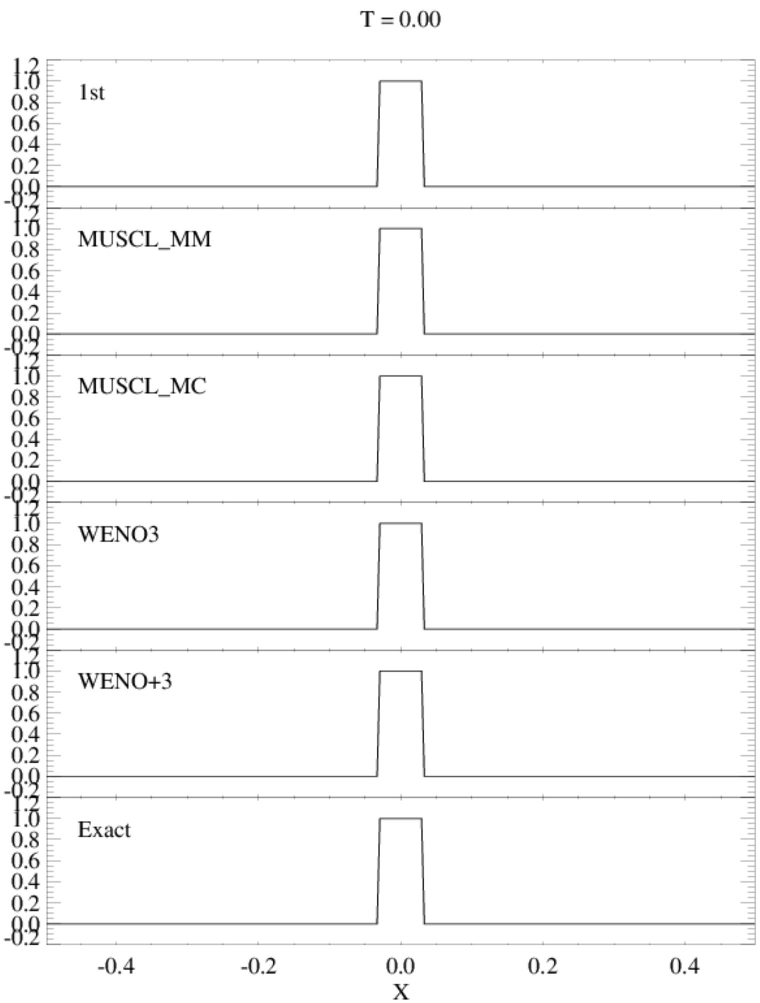
$$y^* = y^n + f(y^n)\Delta t,$$

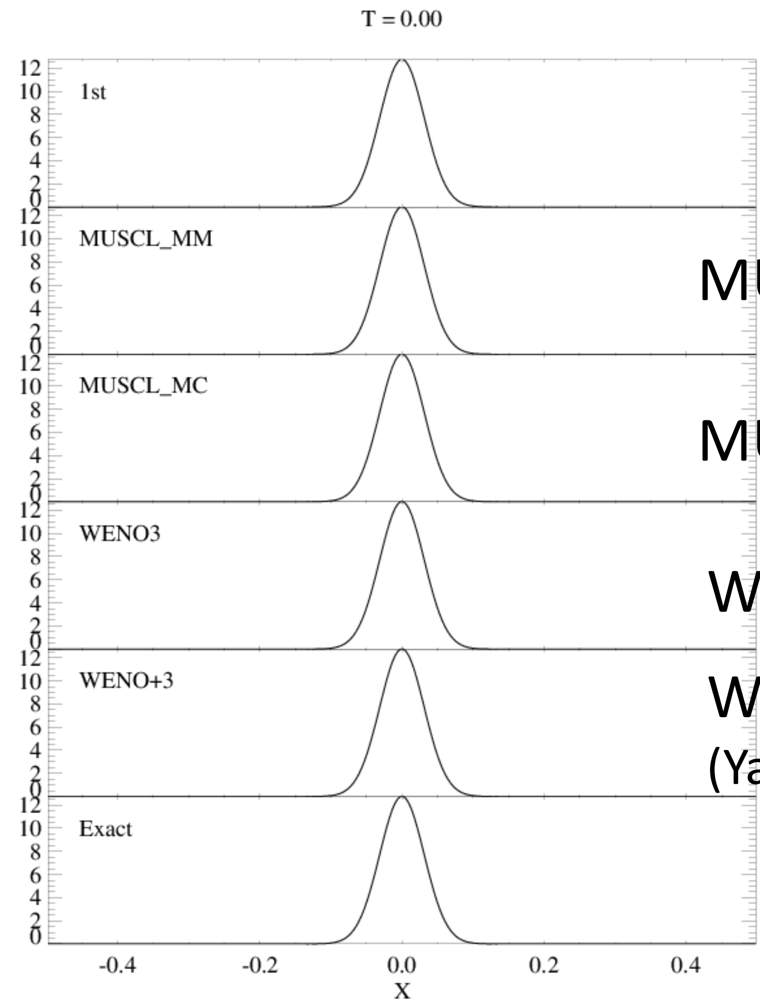
$$y^{**} = \frac{3}{4}y^n + \frac{1}{4}\left[y^* + f(y^*)\Delta t\right],$$

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{3} + \frac{2}{3}\left[y^{**} + f(y^{**})\Delta t\right].$$

線形移流

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \mathrm{const})$$





1次

MUSCL-MM

MUSCL-MC

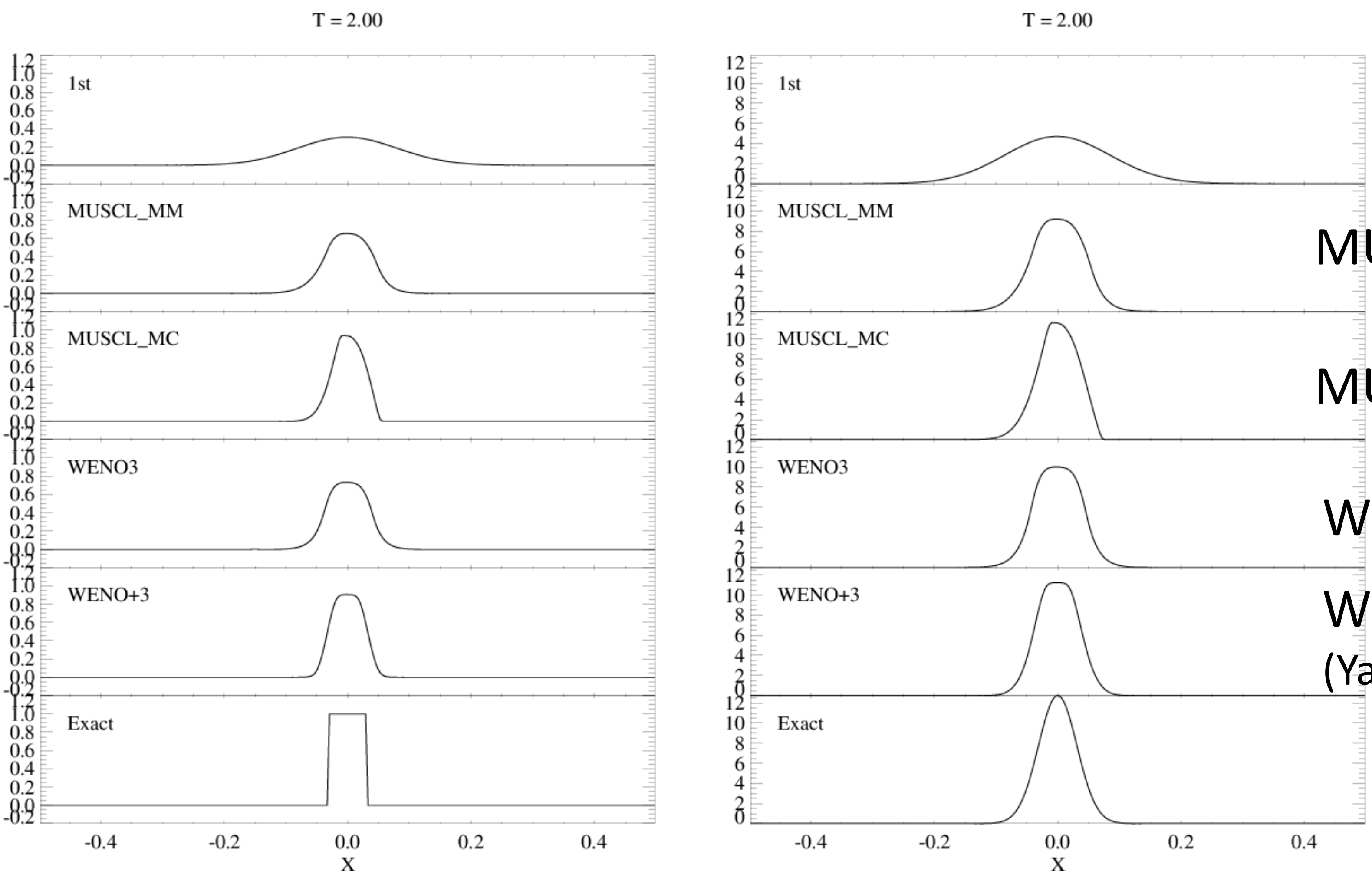
WENO3

WENO+3
(Yamaleev+ ‘09)

厳密解

線形移流

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \mathrm{const})$$



1次

MUSCL-MM

MUSCL-MC

WENO3

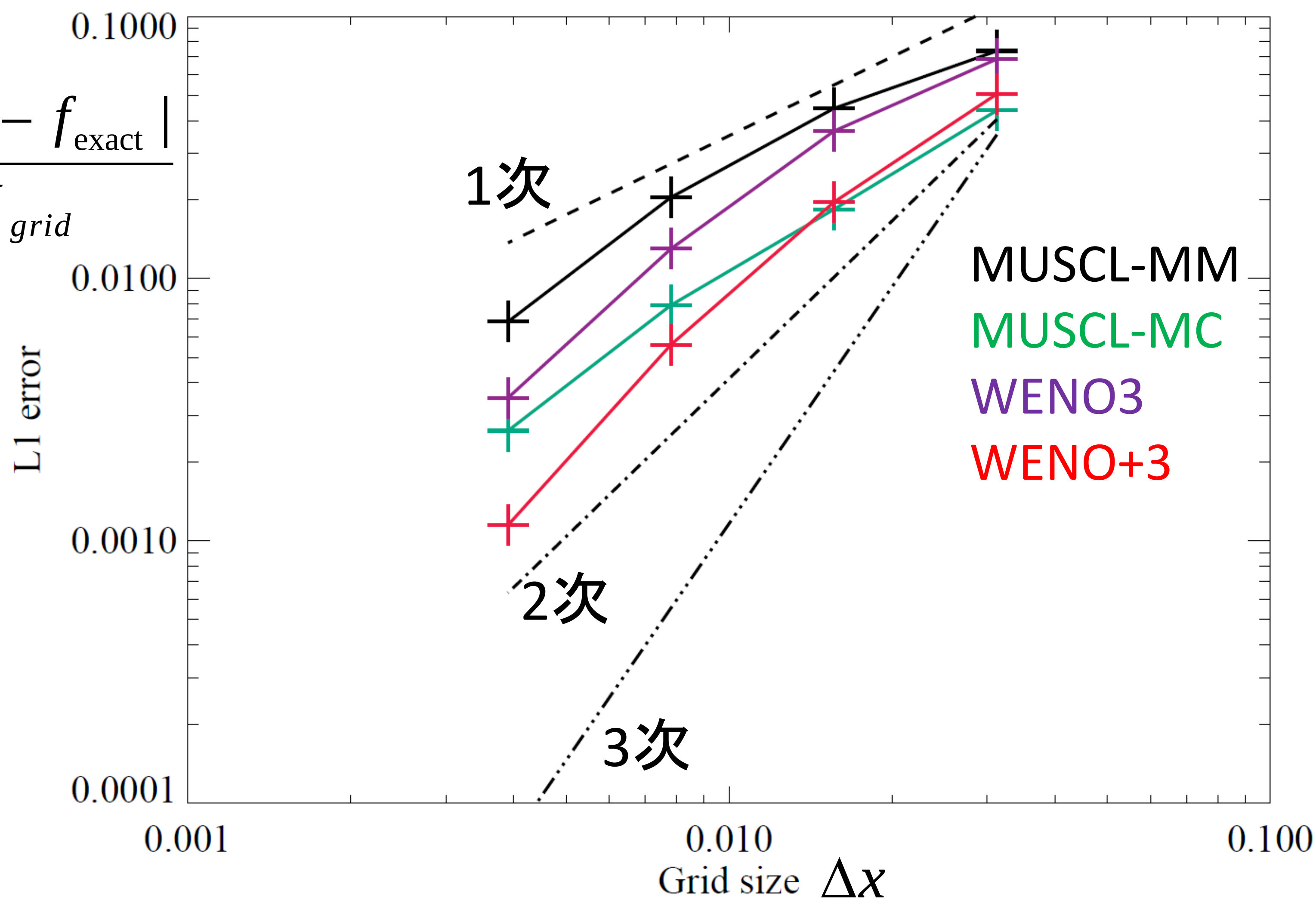
WENO+3
(Yamaleev+ '09)

厳密解

誤差評価

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \mathrm{const})$$

$$\frac{\sum |f - f_{\mathrm{exact}}|}{N_{grid}}$$



1次元理想MHD方程式（保存形式）

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0,$$

$\mathbf{U} = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e\right)^T$, …保存変数（conserved variables）

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u - B_x B_x + p + \mathbf{B}^2/2 \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ \left(e + p + \mathbf{B}^2/2\right) u - B_x \left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}\right) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} p = (\gamma - 1)\left(e - \rho \mathbf{u}^2/2 - \mathbf{B}^2/2\right), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow B_x = \text{const}, \end{array}$$

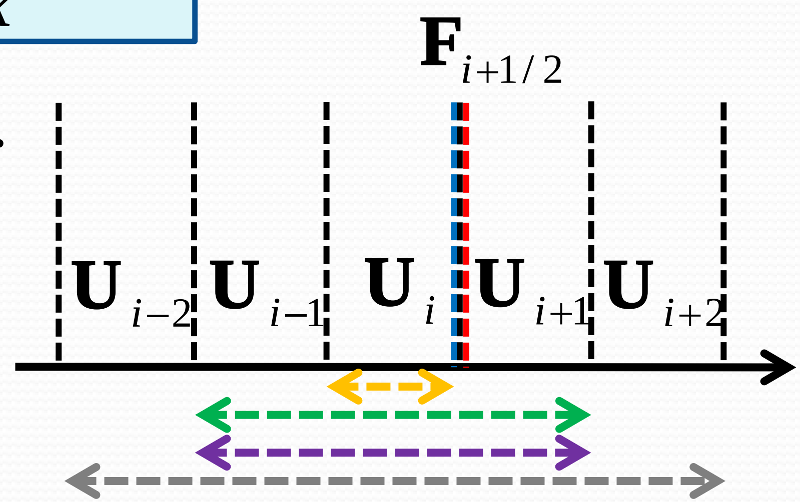
$\mathbf{V} = \left(\rho, u, v, w, B_y, B_z, P\right)^T.$ …基本変数（primitive variables）

1次元MHDシミュレーション

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

U: 保存量ベクトル
F: 流束ベクトル

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^L_{i+1/2}, \mathbf{U}^R_{i+1/2}).$$



- 1次精度

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2} = \mathbf{U}_i,$$

- 2~3次精度

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2} = \mathrm{MUSCL}-\{\mathrm{MM},\mathrm{MC}\}\left(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}\right),$$

$$\mathbf{U}^L_{i+1/2} = \mathrm{WENO}\{3,+3\}\left(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}\right),$$

- 4~5次精度

補間する量

- 保存変数

$$\mathbf{U} = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e\right)^T$$

- 基本変数

$$\mathbf{V} = \left(\rho, u, v, w, B_y, B_z, P\right)^T$$

- 特性変数 $\mathbf{W}$ ...特性線（風の流れ）に沿って一定の量

$$d\mathbf{W} = \mathbf{L}d\mathbf{U}$$ $\mathbf{L}$: システム方程式の左固有行列

- 特性変数を補間するのが望ましいが高コスト
- スクールでは基本（or保存）変数を補間しましょう

三好先生のスライドより抜粋

SSP-RK法

高次精度補間

数値流束の評価

時間積分

フローチャート(例)

保存変数設定@セル*i*

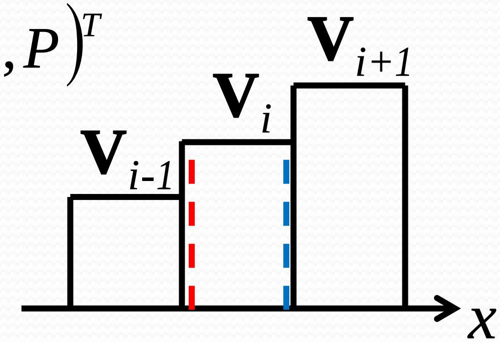
$$\mathbf{U}^n = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e)^T$$

基本変数計算@セル*i*

$$\mathbf{V} = (\rho, u, v, w, B_y, B_z, P)^T$$

基本変数補間

$$\mathbf{V}^L_{i+1/2}, \mathbf{V}^R_{i-1/2}$$



数値流速計算@セル*i*+1/2

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathrm{Riemann}(\mathbf{V}^L_{i+1/2}, \mathbf{V}^R_{i+1/2}).$$

保存変数更新@セル*i*

$$\mathbf{U}^{n+1}_i = \mathbf{U}^n_i - \Delta t \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

三好先生謹製HLLDルーチン

Fortran

```
!-----------------------------------------------------------------
subroutine calc_flux_hlld(rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl, &
                          ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,prr, &
                          bnc,                         &
                          fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen)
!-----------------------------------------------------------------
  real(DP), intent(IN)  :: rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl
  real(DP), intent(IN)  :: ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,prr
  real(DP), intent(IN)  :: bnc
  real(DP), intent(OUT) :: fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen
  real(DP), parameter   :: eps=1.D-40
  real(DP)              :: bnc2,sgn
  real(DP)              :: roli,pml,ptl,enl,vbl
  real(DP)              :: rori,pmr,ptr,enr,vbr
  real(DP)              :: cl2,cal2,cbl2,cfl2,cfl
  real(DP)              :: cr2,car2,cbr2,cfr2,cfr
  real(DP               :: sr,sl
  real(DP)              :: slvl,srvr,rslvl,rsrvr,drsvi
  real(DP)              :: vnc,ptc
  real(DP)              :: slvc,rhdl,rhdli,rhnvl,rhnbl
  real(DP)              :: srvc,rhdr,rhdri,rhnvr,rhnbr
  real(DP)              :: ro2l,vt2l,vu2l,bt2l,bu2l,vb2l,en2l
  real(DP)              :: ro2r,vt2r,vu2r,bt2r,bu2r,vb2r,en2r
  real(DP)              :: rro2l,rro2r,rro2i
  real(DP)              :: vt3m,vu3m,bt3m,bu3m,vb3m,en3l,en3r
  real(DP)              :: rou,vtu,vuu,btu,buu,enu
```

C

```
void calc_flux_hlld(double rol, double vnl, double vtl, double vul, double btl,
                    double bul, double prl,
                    double ror, double vnr, double vtr, double vur, double btr,
                    double bur, double prr,
                    double bnc, double gamma,
                    double *fro, double *fmn, double *fmt, double *fmu, double *fbt,
                    double *fbu, double *fen)
/* Calculate HLLD fluxes */
/* rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl: input primitive variables at the left side */
/* ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,prr: input primitive variables at the right side */
/* bnc: input normal magnetic field at the interface */
/* gamma: specific heat ratio */
/* fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen: output HLLD fluxes at the interface*/
```

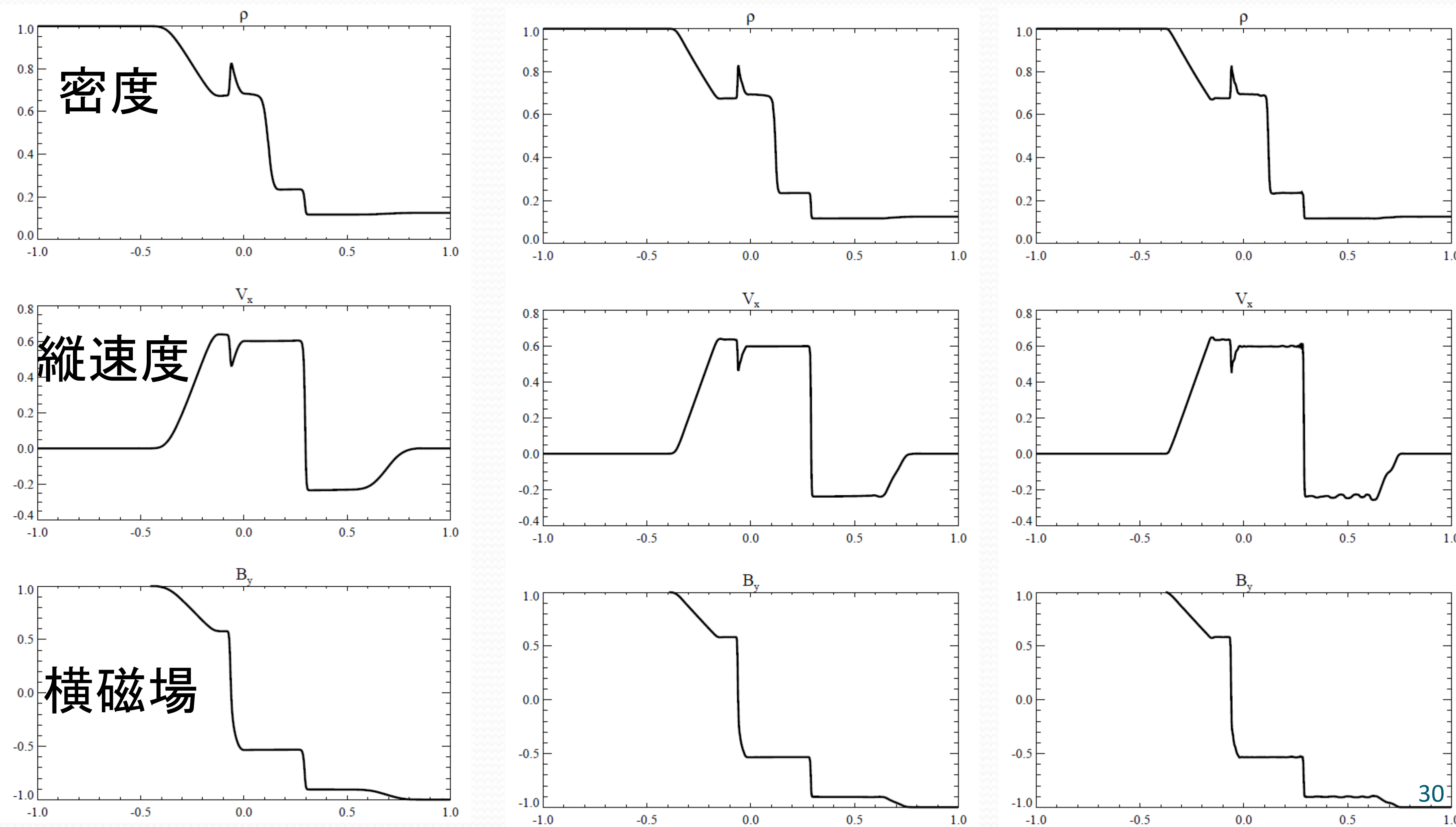
- 基本変数Vを引数として受け取っていることに注意

http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id33

HLLD使用

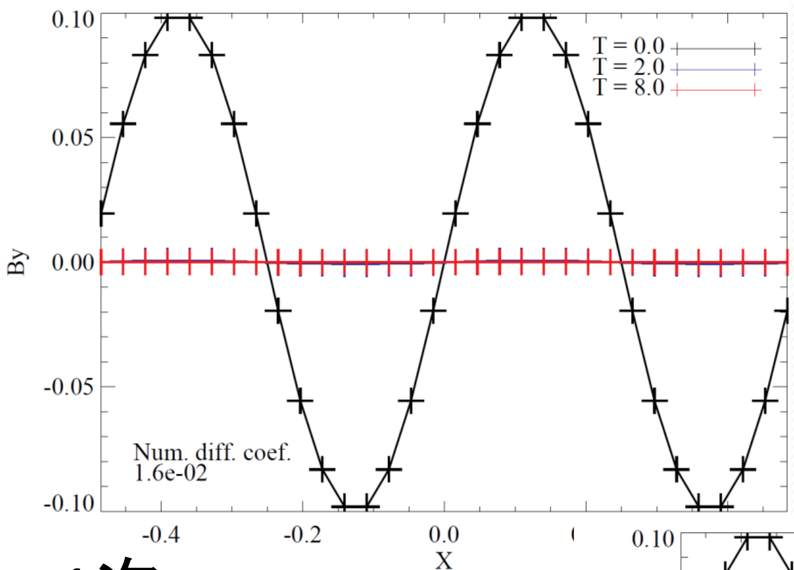
衝撃波管問題（Brio+ 1988）

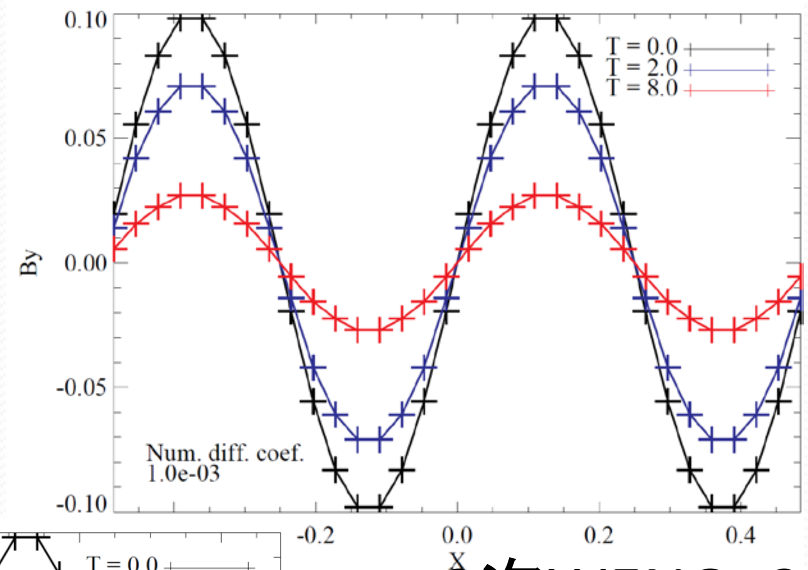
1次　　2次MUSCL-MM　　3次WENO+3



HLLD使用

アルフベン波



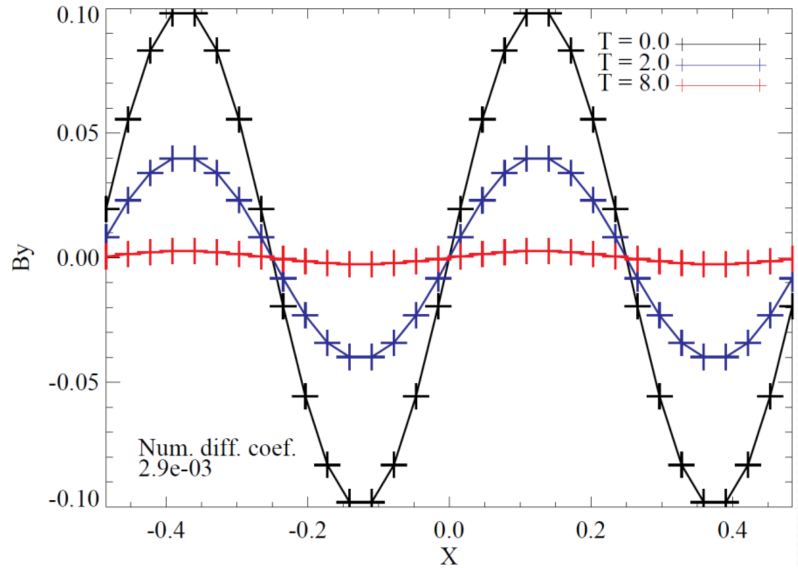


1次

$\eta = 1.6 \times 10^{-2}$

3次WENO+3

$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$



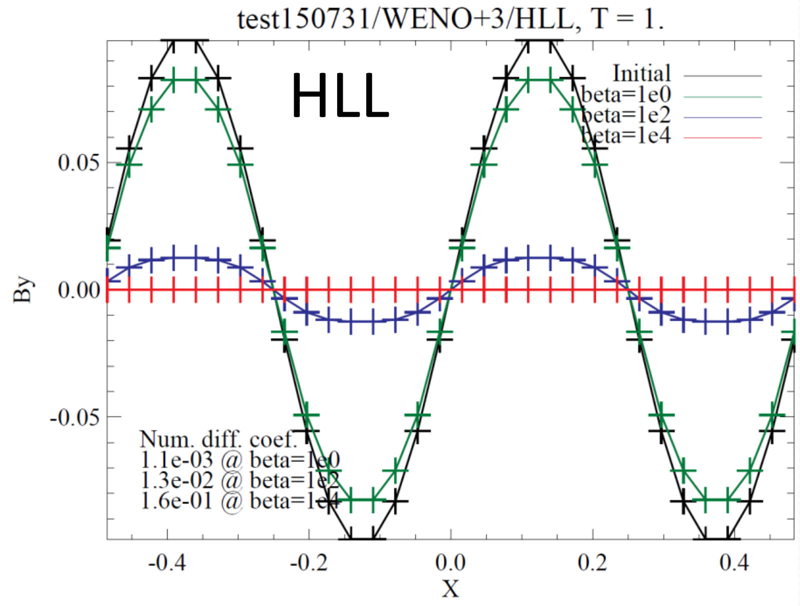
2次MUSCL-MM

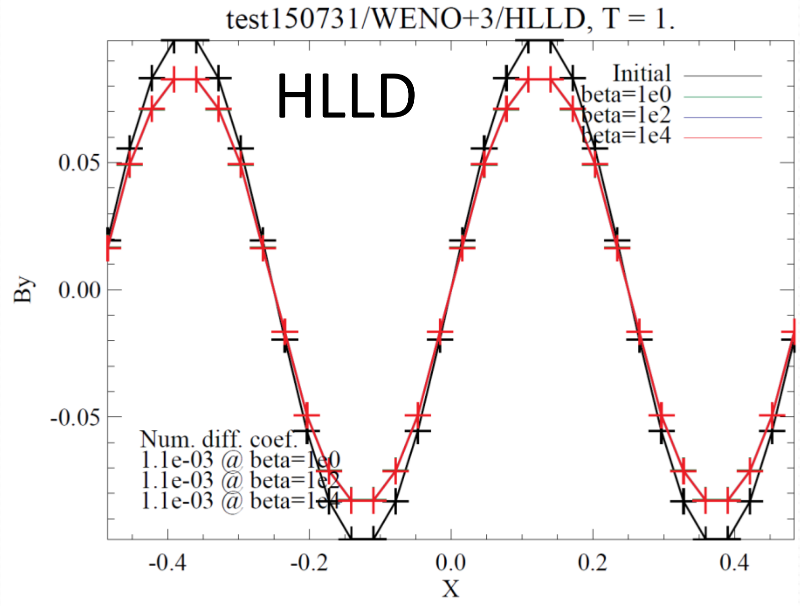
$\eta = 2.9 \times 10^{-3}$

- 高次精度化で<u>数値減衰の軽減</u>

アルフベン波：HLL vs. HLLD

WENO+3使用





Diff. coefficient	HLL	HLLD
β=1e0	1.1e-3	1.1e-3
β=1e2	1.3e-2	1.1e-3
β=1e4	1.6e-1	1.1e-3

$$\eta_{HLL} \approx \left(C_f - V_A\right)\Delta x \propto \beta^{1/2}$$

- 高ベータでは<u>高解像度リーマンソルバが重要</u>

2次元理想MHD方程式(保存形式)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=0,$$

$$\mathbf{U}=\left(\rho,\rho u,\rho v,\rho w,B_x,B_y,B_z,e\right)^T,$$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho uu-B_xB_x+p+\mathbf{B}^2/2\\ \rho vu-B_xB_y\\ \rho wu-B_xB_z\\ 0\\ B_yu-B_xv\\ B_zu-B_xw\\ \left(e+p+\mathbf{B}^2/2\right)u-B_x\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}\right)\end{pmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv-B_yB_x\\ \rho vv-B_yB_y+p+\mathbf{B}^2/2\\ \rho wv-B_yB_z\\ B_xv-B_yu\\ 0\\ B_zv-B_yw\\ \left(e+p+\mathbf{B}^2/2\right)v-B_y\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}\right)\end{pmatrix}.$$

MHDコードの多次元化

U: 保存量ベクトル
F: X方向の流束ベクトル
G: Y方向の流束ベクトル

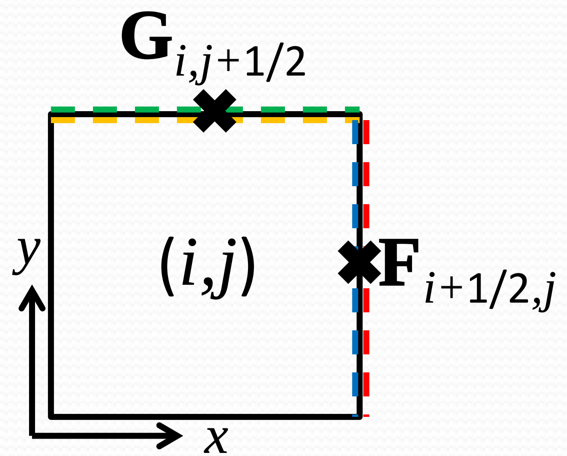
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt}=-\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j}-\mathbf{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x}-\frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2}-\mathbf{G}_{i,j-1/2}}{\Delta y}.$$

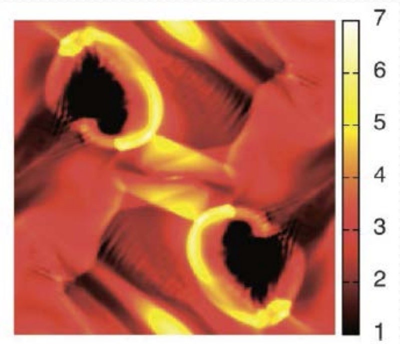
- 1次元数値解法の利用

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^L_{i+1/2,j},\mathbf{U}^R_{i+1/2,j}),$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}=\mathrm{Riemann}(\mathbf{U}^L_{i,j+1/2},\mathbf{U}^R_{i,j+1/2}),$$

  - 同じタイミングで求めるUnsplit法
- <u>磁場発散の処理</u>
  - 数値的なdiv**B**≠0で計算破綻





三好、日本物理学会誌（2014）

磁場発散の処理

- **Constrained Transport (CT) 法**（Evans+ 1988）
  - Div$\mathbf{B}$=0を離散化レベルで保証する特殊なグリッド配置
- Central Difference (CD) 法（Toth 2000）
  - 磁場について中心差分法

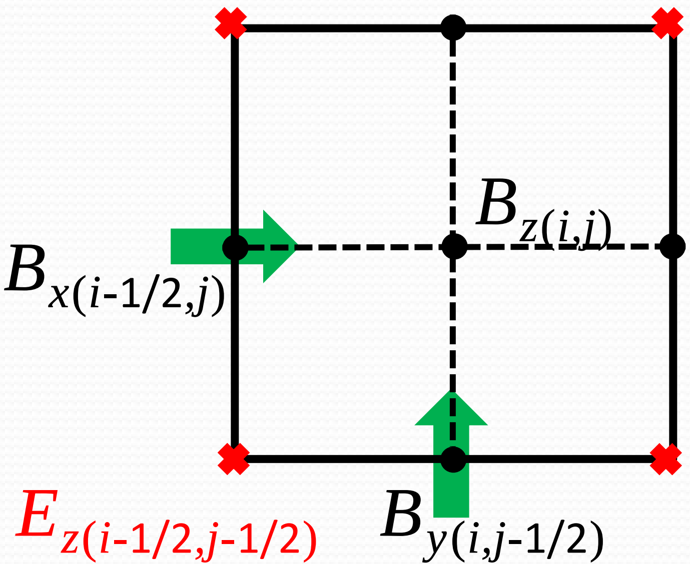
- **プロジェクション法**（Brackbill+ 1980）
  - ポアソン方程式を解いて磁場修正
- **移流拡散法**（Powell 1999, Dedner+ 2002）
  - 有限のdiv$\mathbf{B}$を移流拡散方程式や電信方程式に従って処理

プロジェクション法/CT法

- プロジェクション法

$$\boxed{\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^{*} + \nabla\phi, \ \Rightarrow \ \Delta\phi = -\nabla\cdot\mathbf{B}^{*}.}$$

  - $\mathbf{B}^{*}$: MHDシミュレーションで得た解（div**B**誤差含む）
  - $\mathbf{B}^{n+1}$: div**B**=0を満たす真の解
  - ポアソン方程式解いてϕ得る => $\mathbf{B}^{*}$を$\mathbf{B}^{n+1}$へ更新
- CT法
  - セル境界面の中心に面に垂直な磁場成分を配置
  - セル角の電場を求める（e.g., Balsara+ 1999）
  - $$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla\times\mathbf{E}.$$



移流拡散法

- **9-wave法**（Dedner+ 2002）
  - div**B**を掃除するため方程式を変形、追加

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2}\phi$$

  - **B**とϕについて整理

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c_h^2}{c_p^2}\frac{\partial}{\partial t}\right](\nabla \cdot \mathbf{B}) = c_h^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}),$$

電信方程式（波動+拡散方程式）

- 実装しやすく計算負荷も少ない

移流拡散法

- 1次元の場合

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(c_h^2/c_p^2)\phi \end{pmatrix},$$

演算子分離

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -(c_h^2/c_p^2)\phi,$$

固有値（伝播速度） $\pm c_h$

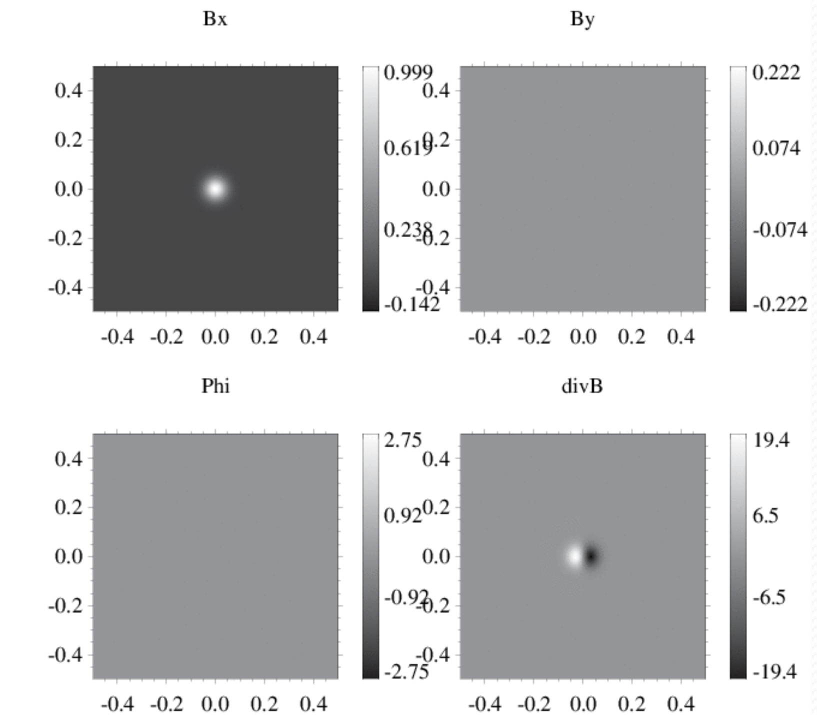
$$\phi^* = \exp[-(c_h^2/c_p^2)\Delta t]\phi^n,$$

c_h: CFL条件から決める最大値

c_p: $(0.18c_h)^{(1/2)}$ （経験的な値）

移流拡散法

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = 0,$$



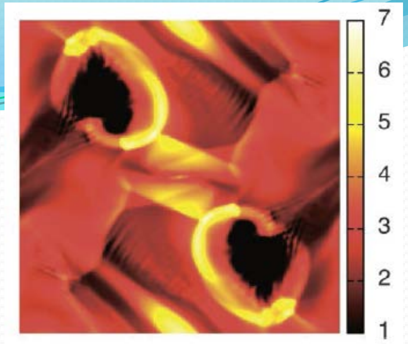
- Lax-Friedrichs flux splitting

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\phi^L_{i+1/2} + \phi^R_{i+1/2}\right) - \frac{c_h}{2}\left(B^R_{x,i+1/2} - B^L_{x,i+1/2}\right),$$

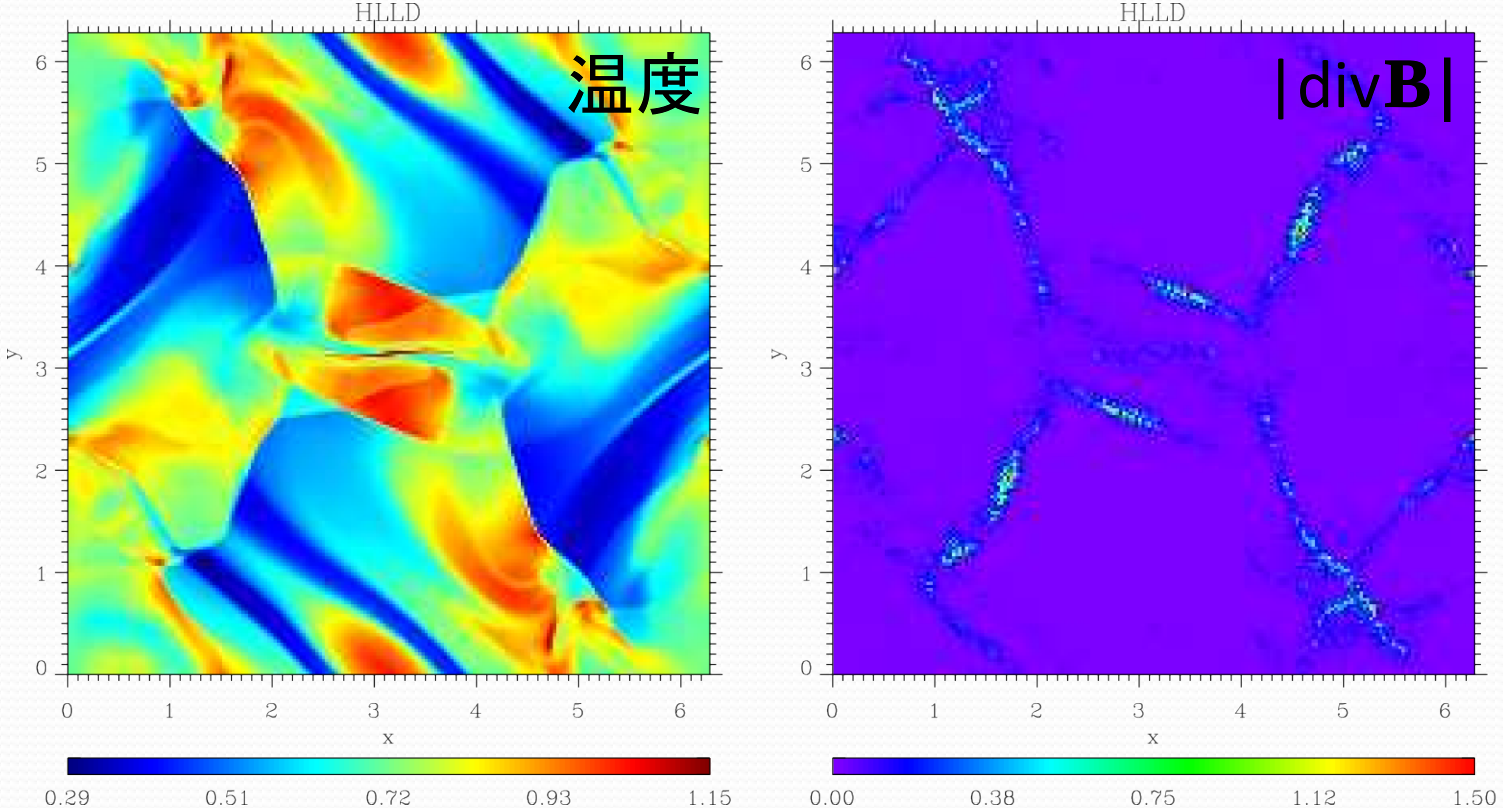
$$c_h^2 B_{x,i+1/2} = \frac{c_h^2}{2}\left(B^L_{x,i+1/2} + B^R_{x,i+1/2}\right) - \frac{c_h}{2}\left(\phi^R_{i+1/2} - \phi^L_{i+1/2}\right).$$

2D MHD with 9-wave

ケアしないと...



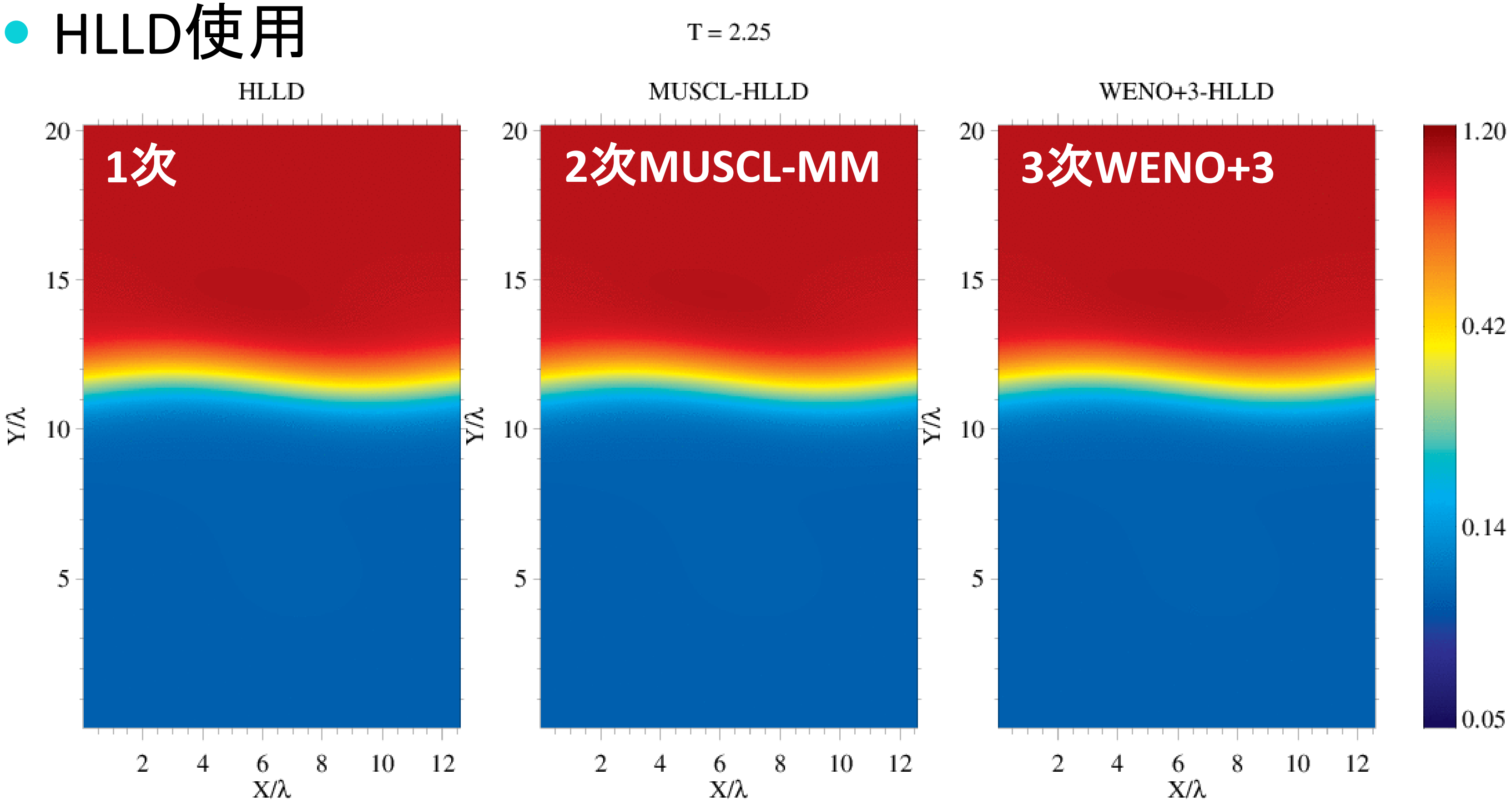
- Orszag-Tang 渦問題



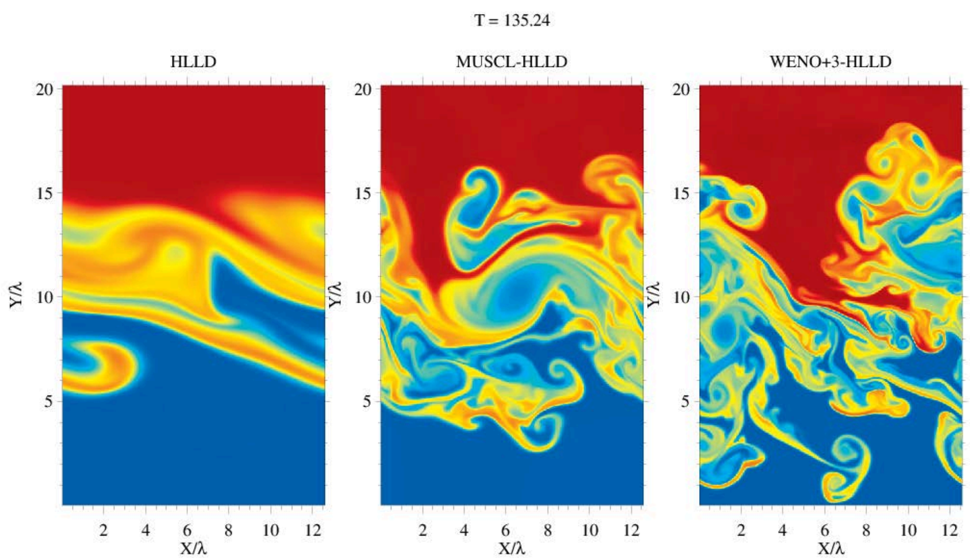
http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id23

ケルビン･ヘルムホルツ不安定

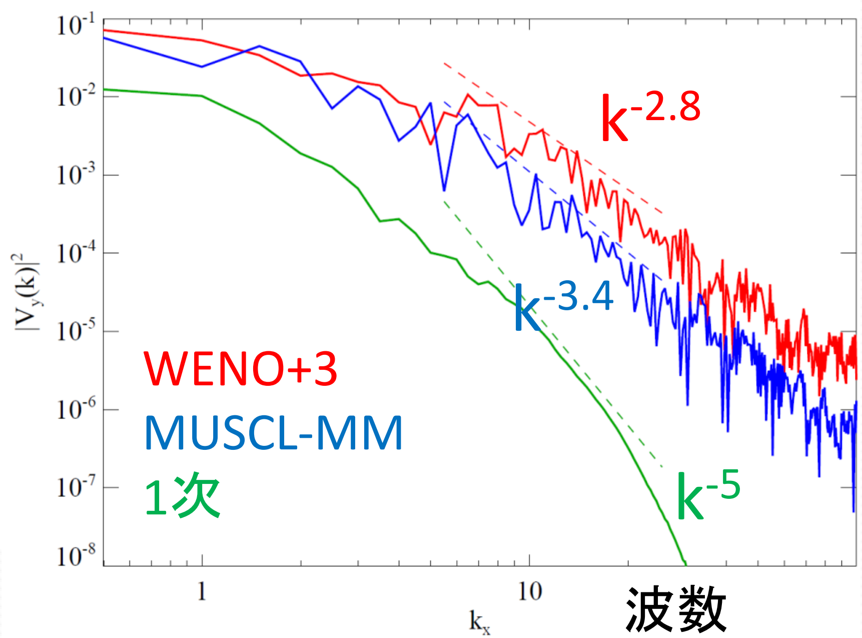
- 速度差がある流体の間で発生する不安定
- HLLD使用



ケルビン･ヘルムホルツ不安定

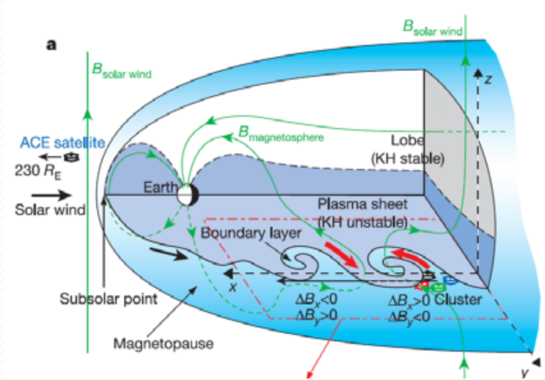


速度のパワースペクトル



波数

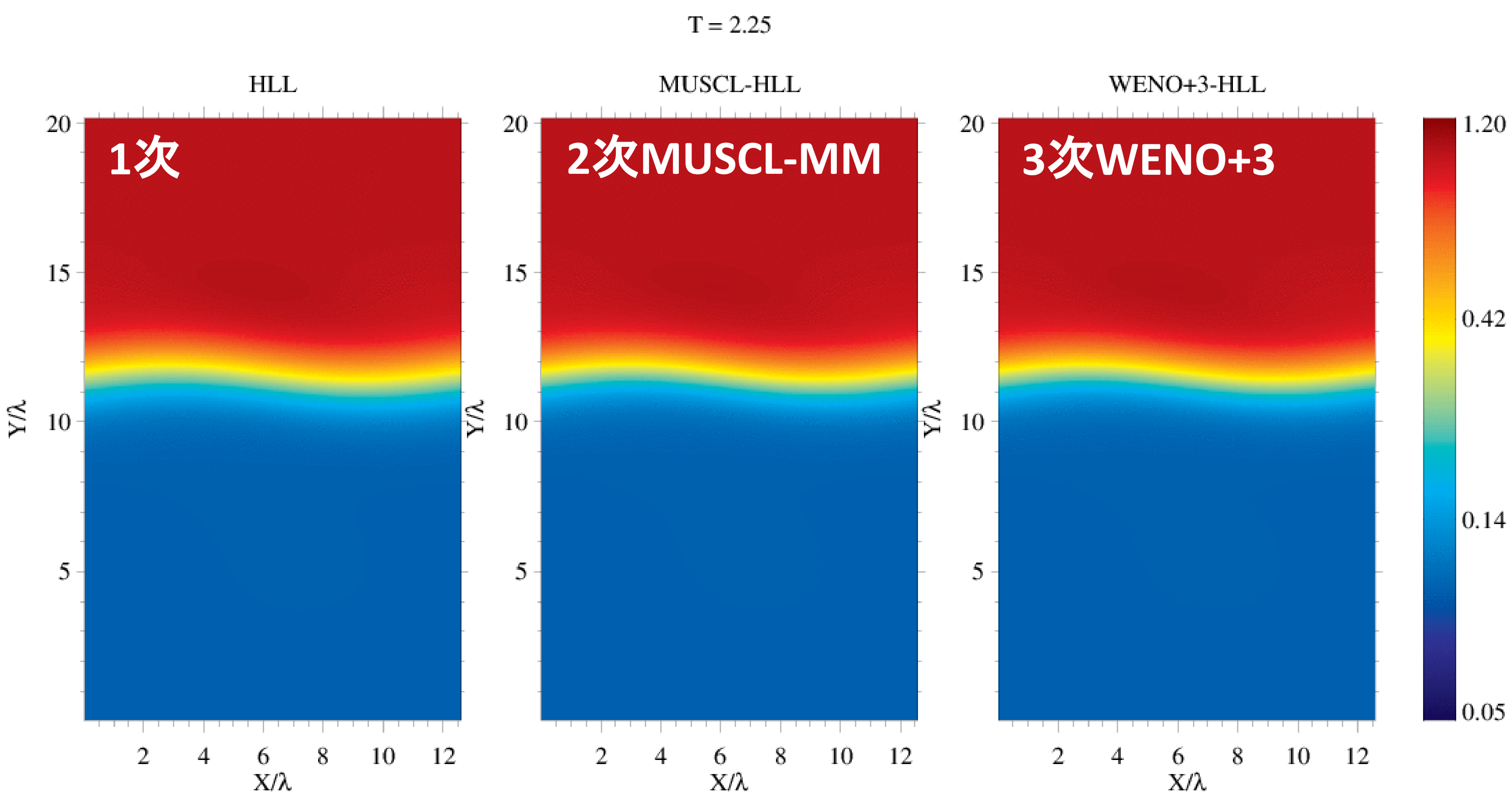
- 2次的不安定で乱流発展（Matsumoto+ '06）
- 物質混合の促進
  - 太陽風-磁気圏相互作用シナリオ



Hasegawa+ '04

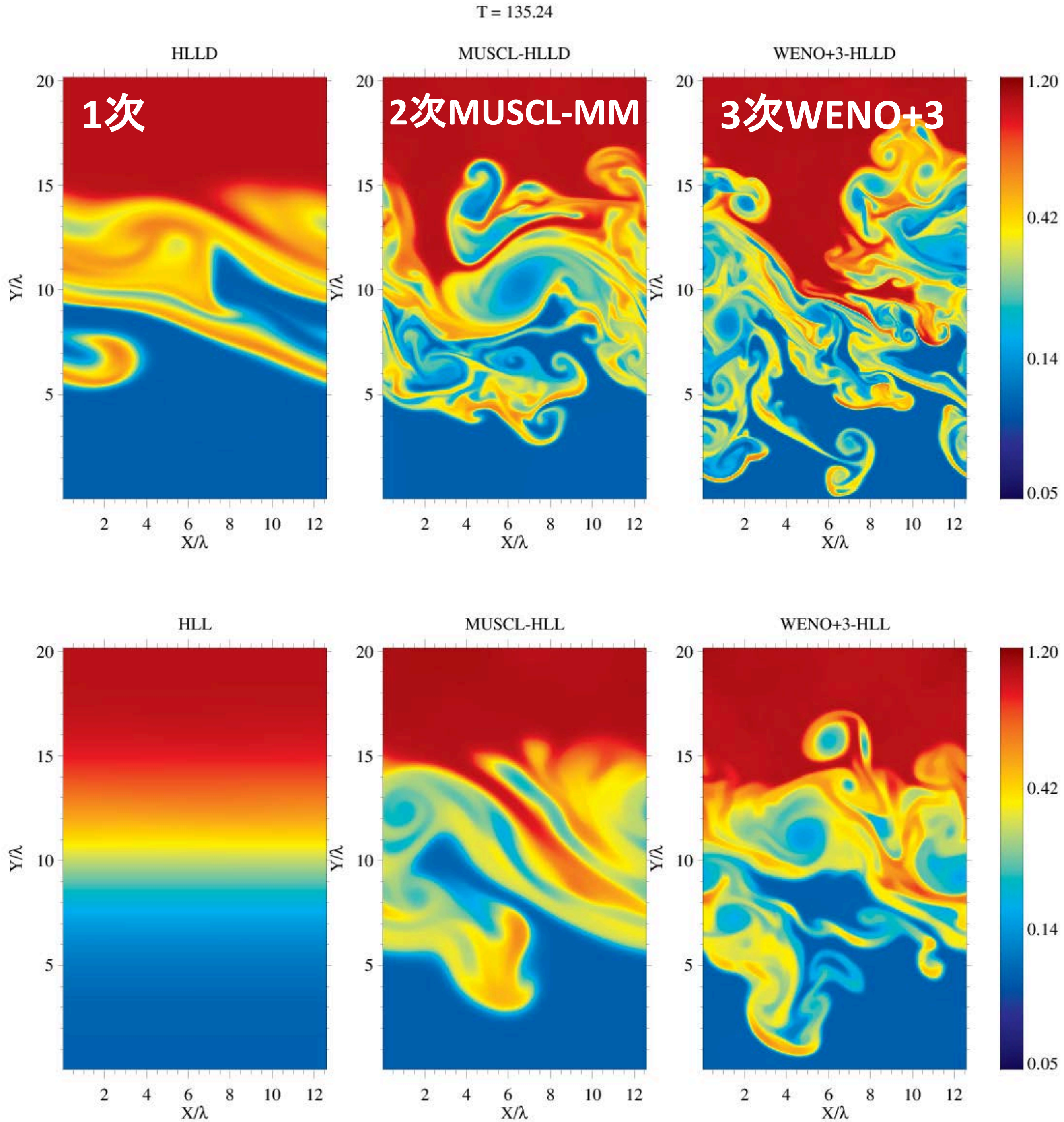
ケルビン・ヘルムホルツ不安定

- HLL法を用いた場合（接触不連続を解像しない）



HLLD

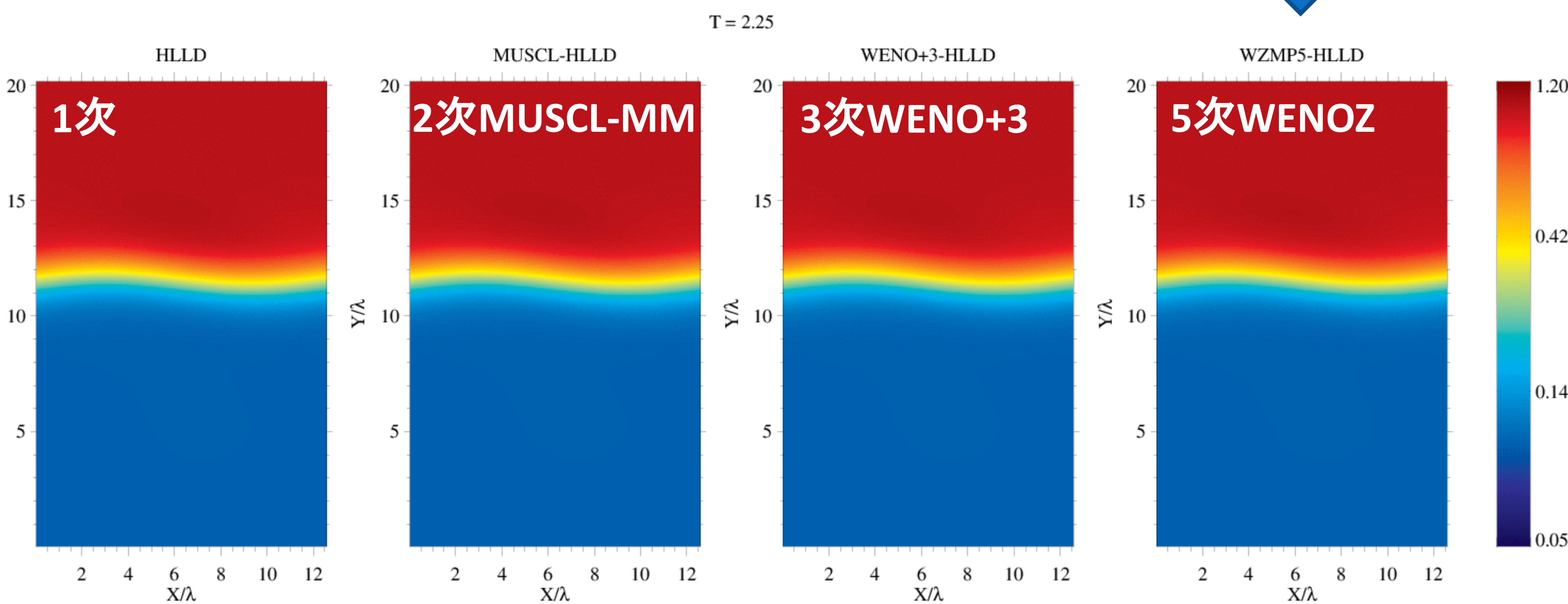
HLL



T = 135.24
HLLD
MUSCL-HLLD
WENO+3-HLLD
1次
2次MUSCL-MM
3次WENO+3
HLL
MUSCL-HLL
WENO+3-HLL
Y/λ
X/λ
1.20
0.42
0.14
0.05

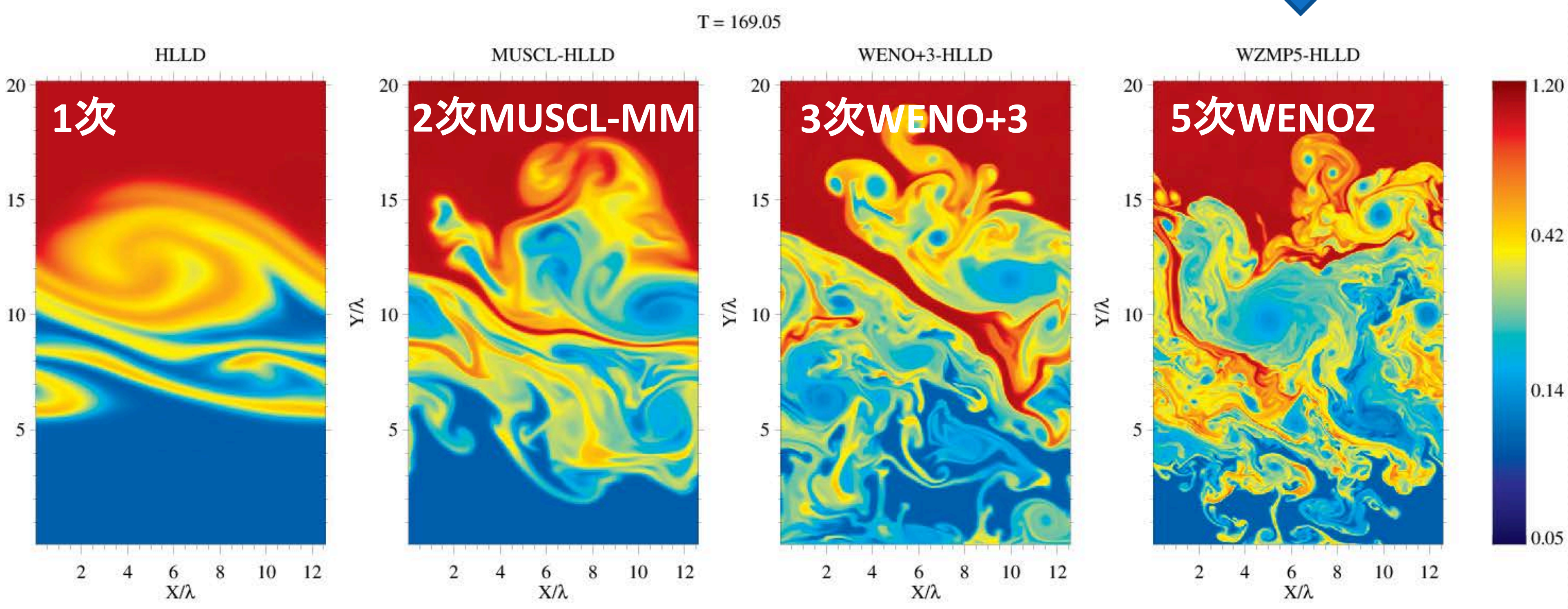
ケルビン･ヘルムホルツ不安定

- さらに頑張るとこんなになります



ケルビン・ヘルムホルツ不安定

- さらに頑張るとこんなになります



まとめ

- 実用的なMHDシミュレーションのためには、**高次精度化**と**多次元化**は必須!!

- **高次精度化**
  - 数値振動を抑制する**非線形補間**
  - リーマンソルバの選択も重要

- **多次元化**
  - 1次元数値解法の利用
  - **磁場発散**の処理（CT, プロジェクション, 移流拡散法）